Devoir à la maison n°9 – niveau 2

I. Information de Fisher

A. Cas discret

Dans cette section I.A, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, θ un paramètre inconnu de I et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times X(\Omega)$ telle que pour tout k élément de $X(\Omega)$, $P(X = k) = p(\theta, k)$ et vérifiant pour tout k de $X(\Omega)$, $\theta \longmapsto p(\theta, k)$ dérivable sur I.

On définit sous réserve d'existence l'information de Fisher de X par

$$I_X(\theta) = \sum_{k \in X(\Omega)} \big(\partial_1(\ln(p(\theta, k)))\big)^2 p(\theta, k)$$

I.A.1 Dans cette question 1, on considère X variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre θ ($\theta \in]0, 1[$). On a alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 1) = p(\theta, 1) = \theta$, $P(X = 0) = p(\theta, 0) = 1 - \theta$ et

$$I_X(\theta) = \big(\partial_1(\ln(p(\theta, 1)))\big)^2 p(\theta, 1) + \big(\partial_1(\ln(p(\theta, 0)))\big)^2 p(\theta, 0)$$

Montrer que $I_X(\theta) = \dfrac{1}{\theta(1-\theta)}$.

I.A.2 Dans cette question 2, on considère X variable aléatoire de loi binomiale de paramètres N et θ ($N \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in]0, 1[$).

a. Montrer que

$$I_X(\theta) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} \sum_{k=0}^{N} (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1 - \theta)^{N-k}$$

b. En déduire que $I_X(\theta) = \dfrac{V(X)}{(\theta(1-\theta))^2}$ puis donner la valeur de $I_X(\theta)$.

I.A.3 Dans cette question 3, on considère X une variable aléatoire de Poisson de paramètre θ ($\theta \in]0,+\infty[$). Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a sous réserve de convergence

$$I_X(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln(p(\theta, k)))\big)^2 p(\theta, k)$$

a. Montrer que la série de terme général $\big(\partial_1(\ln(p(\theta, k)))\big)^2 p(\theta, k)$ converge et calculer sa somme $I_X(\theta)$.

b. Justifier que $I_X(\theta) = E\Big(\big(\partial_1(\ln(p(\theta, X)))\big)^2\Big)$

B. Cas d'une variable gaussienne

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne θ ($\theta \in \mathbb{R}$) et de variance 1 dont la densité est notée $x \longmapsto f(\theta, x)$. On définit sous réserve de convergence l'information de Fisher de X par

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln(f(\theta, x)))\big)^2 f(\theta, x)\,dx$$

I.B.1 Montrer que sous réserve de convergence $I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \theta)^2 f(\theta, x)\,dx$

I.B.2 En déduire l'existence et la valeur de $I_X(\theta)$.

I.B.3 Justifier que $I_X(\theta) = E\Big(\big(\partial_1(\ln(f(\theta, X)))\big)^2\Big)$

II. Minoration du risque quadratique : Inégalité de Cramer-Rao
Dans cette section, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, θ un paramètre inconnu de I et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0, ..., N\}$ ($N \in \mathbb{N}$).
On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times X(\Omega)$ telle que pour tout $k \in \{0, ...,N\}$,

$$P(X = k) = p(\theta, k)$$

et vérifiant :
• pour tout $k \in \{0, ..., N\}$, $\theta \longmapsto p(\theta, k)$ dérivable sur I,
• l'information de Fisher de X notée $I_X(\Omega)$ définie dans la partie I est non nulle pour tout $\theta \in I$.
Le but de cette section est de démontrer l'inégalité suivante due à Cramer et Rao.

Théorème de Cramer-Rao
Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et telle que $E(f(X)) = g(\theta)$, où g est dérivable sur I.
On a alors $V\big(f(X)\big) \geq \dfrac{(g'(\theta))^2}{I_X(\theta)}$.

1. Montrer que pour tout θ élément de I, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \partial_1 p(\theta, k) = 0$
2. En déduire que pour tout θ élément de I, $E\big(\partial_1 \ln\big(p(\theta, X)\big)\big) = 0$ (E)
3. En dérivant partiellement par rapport à θ les deux membres de l'égalité (E), montrer que pour tout θ élément de I,
$E\big(\partial^2_{1,1} \ln(p(\theta,X))\big) = - E\big((\partial_1 \ln(p(\theta,X)))^2\big)$
4. Montrer que pour tout θ élément de I, $g'(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} f(k)\big(\partial_1 \ln(p(\theta,k))\big)p(\theta, k)$
puis que $g'(\theta) = E\big((f(X) - g(\theta))\partial_1 \ln(p(\theta,X))\big)$
5. On pose pour tout t réel

$$L(t) = E\Big(\big((f(X) - g(\theta)) + t\,\partial_1 \ln(p(\theta, X))\big)^2\Big)$$

a. Développer le polynôme L suivant les puissances décroissantes de t.
b. Calculer le discriminant Δ de L et justifier que $\Delta \leq 0$.
c. En déduire l'inégalité de Cramer-Rao.