

Partie I

Qu 1 : Soit (S) un système de n équations à n inconnues. Que signifie que (S) est un système de Cramer ?

(S) est un système de Cramer s'il admet une solution unique.

Qu 2 : Soit A et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Formule du binôme de Newton, avec les conditions :

si A et B commutent ($AB = BA$) alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Qu 3 : Soit $X_1, \dots, X_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Y est une combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_p$ si :

il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que : $Y = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_p X_p$.

Qu 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est une matrice inversible si :

il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.B = I_n$ (ou $B.A = I_n$)

Qu 5 : Donner la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Qu 6 : Soit f une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

A quelles conditions f est-elle une application linéaire ?

$$\forall (u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda.u) = \lambda.f(u) \end{cases}$$

Qu 7 : Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer $\text{Im}(f)$ à l'aide de $(e_1, \dots, e_n)$.

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$$

Qu 8 : Soit G un graphe non orienté. Enoncer le lemme d'Euler

La somme des degrés des sommets est égal au double du nombre d'arêtes.

Partie II

Qu 9 : Ecrire la formule du triangle de Pascal et compléter le triangle de Pascal :

Formule : si $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Triangle de Pascal (calcul de $\binom{n}{k}$)

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Qu 10 : Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements. Formule des probabilités composées :

si $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

Qu 11 : Soit A et B deux événements.

A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Qu 12 : Soit $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements et B un événement. Enoncer la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^p P(A_k)P_{A_k}(B) = \sum_{k=1}^p P(A_k \cap B)$$

Qu 13 : Soit A_1, A_2, A_3 3 événements quelconques.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Qu 14 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. A quelle condition $E(X)$ existe-t-elle ? Quelle est alors sa valeur ?

$E(X)$ existe si la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} i.P(X = i)$ est absolument convergente. Dans ce cas, $E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i.P(X = i)$

Qu 15 : Soit X une V.A.R. discrète qui admet une espérance et une variance. Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Espérance et variance de $Y = aX + b$?

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Qu 16 : Soit X une V.A.R. discrète, qui admet une espérance et une variance. Formule de Huygens ?

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Qu 17 : Compléter le tableau suivant :

Loi	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$	Cas d'application
Bernoulli $B(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$	succès de proba p $X = 1$ si succès, 0 si échec
Géométrique $G(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1 - p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	succès de proba p épreuves indép. $X = 1^{\text{er}}$ succès
Uniforme $U(\{1, \dots, n\})$	$\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	Equiprobabilité
Poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	
Binomiale $B(n,p)$	$\{0, \dots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	succès de proba p n épreuves indép. $X = nb$ succès

Partie III

Qu 18 : Compléter :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Qu 19 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

f est dérivable en a si : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a

dans ce cas, sa dérivée $f'(a)$ est définie par : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

et l'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Qu 20 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$. Compléter :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Qu 21 : Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} nq^{n-1}$ converge si et seulement si : $-1 < q < 1$

Dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

Qu 22 : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite.

$(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique si : il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq 1, u_{n+1} = q \cdot u_n$

Dans ce cas : $\forall n \geq 1, u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Qu 23 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 3 suites. Énoncer le théorème d'encadrement.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite L , alors (v_n) converge vers L .

Qu 24 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Énoncé l'inégalité des accroissements finis (version valeurs absolues)

S'il existe un réel M tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$, alors :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, |f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|$$

Qu 25 : Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle I , qui ne s'annule pas.

Donner une primitive de :

$$a) \frac{u'}{u} : \ln(|u|) \quad b) u'u^n \ (n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{n+1} u^{n+1} \quad c) \text{ (si } u(x) > 0 \text{ sur } I) \frac{u'}{\sqrt{u}} : 2\sqrt{u}$$

Qu 26 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' + a \cdot y = 0$?

Les solutions sont les fonctions $f(t) = \lambda \cdot e^{-at}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Qu 27 : Soit a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Donner une solution de l'équation différentielle $y' + a \cdot y = b$:

Une solution particulière est la solution constante $y = \frac{b}{a}$.