ECG2 - Correction du D.S. n°2

Exercice 1

1) a) Remarque : $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
Sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ f est continue car quotient de fonctions continues.
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.
Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, f est de classe C^1 car quotient de fonctions de classe C^1.
$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{1 \times (e^x - 1) - x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$

c) si $x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \dfrac{\dfrac{x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x - 1}{e^x - 1}}{x} = \dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$

$x - e^x + 1 \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$ et $e^x - 1 \sim_0 x$ donc $\dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \sim_0 -\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim_0 -\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2) a) u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = (-1)e^x + (1 - x)e^x = -x.e^x$ du signe de $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	0	$-$
$u(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

b) D'après le tableau de variations précédent, $\forall x \neq 0$, $u(x) < 0$ donc $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x - 1)^2} < 0$

$f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

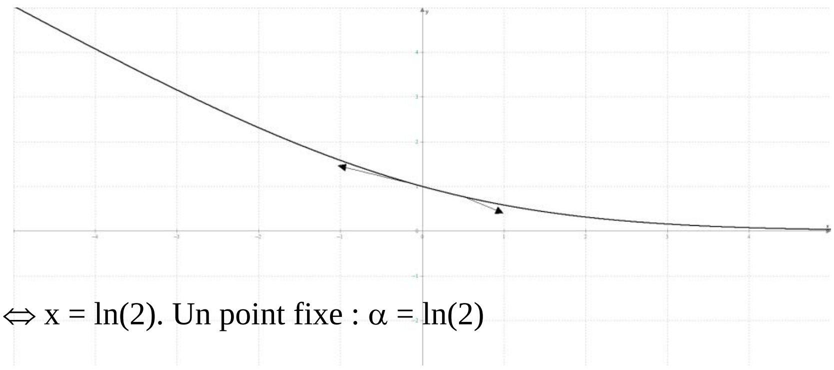
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x}{e^x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Donc C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-1/2$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\searrow$ 0

f)



3. $f(0) \neq 0$ donc 0 n'est pas un point fixe.
Si $x \neq 0$, $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. Un point fixe : $\alpha = \ln(2)$

4. Posons $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$ sur $[0;+\infty[$
g est dérivable sur $[0:+\infty[$ et $\forall x \geq 0$, $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - x - 1)$
Posons $h(x) = e^x - x - 1$ sur $[0;+\infty[$. h est aussi dérivable et $\forall x \geq 0$, $h'(x) = e^x - 1$
$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc h est croissante sur $[0;+\infty[$.
De plus $h(0) = 0$ donc h est positive sur $[0;+\infty[$ donc g' aussi.
ou : f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc

$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \dfrac{x}{e^x - 1} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$

Ou par convexité de la fonction exp : $e^x \geq x + 1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$ (courbe au-dessus de la tangente en 0)
Donc g est croissante sur $[0; +\infty[$.
De plus $g(0) = 0$ donc $\forall\ x \in [0; +\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$
b) $\forall\ x > 0$,

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{2(e^x - 1 - xe^x)}{2(e^x-1)^2} + \frac{(e^x-1)^2}{2(e^x-1)^2} = \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$$

c) On a montré (partie I, question 2b)) que $\forall\ x \geq 0,\ f'(x) < 0$

De plus $\forall\ x > 0,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2} \geq 0$ (question a). donc $\forall\ x > 0,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x)$.

De plus $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Donc $\forall x \geq 0,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$:
_ $u_0 = 1 \geq 0$
_ supposons qu'à un rang n, $u_n \geq 0$ Comme f est minorée par 0 : $f(u_n) \geq 0$ $u_{n+1} \geq 0$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

Sur $[0; +\infty[$, $|f'(t)| \leq \frac{1}{2}$. De plus $u_n \in [0; +\infty[\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0; +\infty[$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

3. Montrons par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.

_ pour n = 0 : $\frac{1}{2^0}|1-\alpha| = |1 - \alpha|$ donc l'inégalité est vraie

_ supposons qu'à un rang n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1-\alpha|$ donc $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|1-\alpha|$ $(\times 1/2)$

Or $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|1-\alpha|$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1-\alpha|$.

4. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1-\alpha|$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}|1-\alpha| = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

5. On a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|1-\alpha| \leq \frac{1}{2^n \times 3}$.

Pour que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-9}$, il suffit que $\frac{1}{2^n \times 3} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n \times 3 \geq 10^9 \Leftrightarrow 2^n \geq \frac{10^9}{3} \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln\left(\frac{10^9}{3}\right)$

$\Leftrightarrow n.\ln(2) \geq 9\ln(10) - \ln(3) \Leftrightarrow n \geq \frac{9\ln(10) - \ln(3)}{\ln(2)}$ ($\approx 28{,}31$). Donc $n_0 = 29$ convient.

6. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\alpha|$. Les séries sont à termes positifs et $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\alpha|$ converge (car $-1<\frac{1}{2}<1$),

donc $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n - \alpha|$ converge aussi. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n - \alpha)$ converge absolument, donc converge.

Exercice 2

Partie I – Etude de la fonction f

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\ln(x) =_{+\infty} o(x)$ donc $f(x) \sim_{+\infty} x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0;1[$ f est continue et strictement décroissante. De plus $2 \in]1; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution a sur $]0;1[$. De même, l'équation admet une unique solution b sur $[1; +\infty[$.

3. $f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1{,}3$ $f(b) = 2$ $f(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2{,}6$

$f(2) \leq f(b) \leq f(4)$ et f est croissante sur $[1; +\infty[$, donc $2 \leq b \leq 4$.

Partie II – Etude d'une suite

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq b$:

_ $u_0 = 4$ donc u_0 existe et $u_0 \geq b$ d'après la partie I.

_ supposons qu'à un rang n, u_n existe et $u_n \geq b$:

$u_n \geq b$ donc $u_n > 0$ donc $\ln(u_n)$ existe donc u_{n+1} existe.

$\ln(u_n) \geq b$ $2 + \ln(u_n) \geq 2 + \ln(b)$.

Or $f(b) = 2$ donc $b - \ln(b) = 2$ $2 + \ln(b) = b$ donc $u_{n+1} \geq b$.

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2; +\infty[$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - f(u_n)$.

Or $u_n \geq b$ et f croissante sur $[2; +\infty[$ donc $f(u_n) \geq f(b)$ $f(u_n) \geq 2$ $2 - f(u_n) \leq 0$.

Donc (u_n) est décroissante.

Ou : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$:

_ $u_0 = 4$ $u_1 = \ln(u_0) + 2 = 2\ln(2) + 2 \approx 3{,}4$ donc $u_1 \leq u_0$

_ supposons qu'à un rang n, $u_{n+1} \leq u_n$:

On a alors $\ln(u_{n+1}) \leq \ln(u_n)$ $\ln(u_{n+1}) + 2 \leq \ln(u_n) + 2$ $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc, d'après la propriété de la limite monotone, elle converge vers un réel L.

D'après le théorème du point fixe, on a : $L = \ln(L) + 2$ $L - \ln(L) = 2$ $f(L) = 2$.

D'après la partie I, on a donc $L = a$ ou $L = b$. Comme $u_n \geq b$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la valeur a est impossible.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$.

6. Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}$ (par télescopage) $= 4 - u_{N+1}$

$\lim\limits_{N \to +\infty} u_{N+1} = b$ donc $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N = 4 - b$. Donc la série converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = 4 - b$

Partie III – Etude d'une deuxième suite

7. a. Si (v_n) converge vers un réel L, d'après le théorème du point fixe, $L = L + \ln(L)$ donc $\ln(L) = 0$

$L = 1$. La seule limite réelle possible de (v_n) est 1

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \ln(v_n)$ $v_n \geq 1$ donc $\ln(v_n) \geq 0$ donc $v_{n+1} \geq v_n$. La suite est croissante.

Si (v_n) converge, alors sa limite est 1. C'est impossible car $v_0 = 2$ et (v_n) est croissante.

Donc (v_n) est croissante et ne converge pas. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 3 1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x.e^{kx} + e^{kx}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{kx} = 0$ par croissances comparées (car $k > 0$) et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$.

b) f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = 1.e^{kx} + (x + 1)ke^{kx} = (kx + k + 1)e^{kx}$ du signe de $kx + k + 1$

$kx + k + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{k+1}{k} = -1 - \dfrac{1}{k}$

$f_k(0) = 1 \quad f_k(-1) = 0 \quad f_k\left(-1 - \dfrac{1}{k}\right) = \left(-1 - \dfrac{1}{k} + 1\right)\exp\left(k\left(-\dfrac{k+1}{k}\right)\right) = -\dfrac{1}{k}\exp(-(k + 1)$

x	$-\infty$		$-1-1/k$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f_k(x)$	0		$-e^{-(k+1)}/k$		0		1		$+\infty$

2. a) $k \geq 1$ et sur $]-\infty\,;-1]$, f_k est négative, donc l'équation $f_k(x) = k$ n'admet pas de solution.
Sur $[1\,;+\infty[$, f_k est continue et strictement croissante, et $k \in [0\,;+\infty[$, donc l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution u_k sur $[1\,;+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$.
b) On sait que $f_1(0) = 1$ donc 0 est l'unique solution de l'équation $f_1(x) = 1$. Donc $u_1 = 0$.

3) $\forall k \geq 1$, $f_k(0) = 1 \quad f_k(u_k) = k \quad f_k\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\dfrac{\ln(k)}{k} + 1\right)\exp(\ln(k)) = \dfrac{\ln(k) + k}{k}k = \ln(k) + k$

Or $k \geq 1$ donc $\ln(k) \geq 0 \quad \ln(k) + k \geq k \quad$ donc $f_k(0) \leq f_k(u_k) \leq f_k\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)$

Comme f_k est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$, $0 \leq u_k \leq \dfrac{\ln(k)}{k}$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln(k)}{k} = 0$ par croissances comparées, donc par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

4) a) $f_k(u_k) = k \Leftrightarrow (u_k + 1)e^{ku_k} = k \Leftrightarrow \ln((u_k + 1)e^{ku_k}) = \ln(k) \Leftrightarrow \ln(u_k + 1) + k.u_k = \ln(k)$

$\Leftrightarrow u_k = \dfrac{\ln(k)}{k} - \dfrac{\ln(u_k + 1)}{k}$

b) Donc $\dfrac{k.u_k}{\ln(k)} = 1 - \dfrac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)} \qquad \lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln(1 + u_k) = 0$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln(k) = +\infty \qquad \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k.u_k}{\ln(k)} = 1 \qquad \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1 \qquad u_k \sim_{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{k}$.

5. $\forall k \geq 3$, $\ln(k) \geq 1 \qquad \dfrac{\ln(k)}{k} \geq \dfrac{1}{k}$. Les termes sont positifs (ou on montre que $\dfrac{1}{k} =_{+\infty} o\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)$)

La série $\sum\limits_{k\geq1} \dfrac{1}{k}$ diverge, donc la série $\sum\limits_{k\geq1} \dfrac{\ln(k)}{k}$ diverge, donc la série $\sum\limits_{k\geq1} u_k$ diverge.

Exercice 4 (a) $H_t(r) = \ln((at^r + 1 - a))^{1/r}) = \dfrac{1}{r}\ln(1 + at^r - a)$

$t^r = e^{r\ln(t)} \quad \lim\limits_{r\to0} r\ln(t) = 0$ donc $\lim\limits_{r\to0} t^r = 1$ donc $\lim\limits_{r\to0} at^r - a = 0$

Donc $\ln(1 + at^r - a) \sim_0 at^r - a \sim_0 a(t^r - 1) \sim_0 a(e^{r\ln(t)} - 1)$

Comme $\lim\limits_{r\to0} r.\ln(t) = 0 \quad e^{r.\ln(t)} - 1 \sim_0 r.\ln(t)$ donc $H_t(r) \sim_0 \dfrac{ar\ln(t)}{r} \sim_0 a\ln(t)$ donc $\lim\limits_{r\to0} H_t(r) = a.\ln(t)$.

$S_t(r) = e^{H_t(r)}$ donc $\lim\limits_{r\to0} S_t(r) = e^{a\ln(t)} = t^a$. (b) $F(x, y) = \lim\limits_{r\to0} N_{(x,y)}(r) = \lim\limits_{r\to0} yS_z(r) = yz^a = \dfrac{yx^a}{y^a} = x^a y^{1-a}$.