

Exercice 1

def h(n,x):

 return x**n+1+1/x**n

... if h(n,c) < 4 :

 a=c

 else :

 b=c

 return a

Si $h_n(c) < 4$ $h_n(c) < h_n(v_n)$ et comme h_n est croissante sur $[1; +\infty[$, $c < v_n$.

$v_n \in [c; b]$ donc on pose $a=c$ (et sinon $b=c$).

c) Sur le graphique sont représentées les valeurs de v_n^n pour $n \in \{1, \dots, 20\}$.

Il semble que v_n^n soit constant. (environ égal à 2,6).

Exercice 2

Partie A – Etude du cas où $a = 1$ 1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rang}(M - I_3) = \text{rang} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{rang} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (car $C_2 = 0$ et $C_3 = -C_1$) = 1 (le vecteur est non nul, donc forme une famille libre).

$$2. (M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Le polynôme $(X - 1)^2$ est donc un polynôme annulateur de M .

$$3. (M - I_3)^2 = 0 \text{ et } M \text{ et } I_3 \text{ commutent donc } M^2 - 2I_3M + I_3^2 = 0 \quad M^2 - 2M + I_3 = 0$$

$$M(M - 2I_3) = -I_3 \quad M(2I_3 - M) = I_3. \text{ Donc } M \text{ est inversible et } M^{-1} = 2I_3 - M \quad (\text{on trouve } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix})$$

4. a) Par récurrence :

_ pour $n=0$: $M^0 = I_3$ posons $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ alors $a_0M + b_0I_3 = I_3$ La propriété est vraie au rang 0.

_ supposons qu'à un rang n , $M^n = a_nM + b_nI_3$

$$\text{Alors } M^{n+1} = M^n.M = (a_nM + b_nI_3)M = a_nM^2 + b_nM = a_n(2M - I_3) + b_nM = (2a_n + b_n)M - a_nI_3$$

$$\text{Avec } \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = -a_n \end{cases}, \text{ on a : } M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$$

$$\text{Conclusion : en posant } \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = -a_n \end{cases}, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_nM + b_nI_3$$

$$b) \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_{n+1} - a_n$$

c) (a_n) est une suite linéaire récurrente d'ordre 2. Equation caractéristique :

$$X^2 = 2X - 1 \quad X^2 - 2X + 1 = 0 \quad (X - 1)^2 = 0 \quad \text{racine double : } 1$$

Donc il existe deux réels λ et μ tels que : $a_n = (\lambda.n + \mu)1^n = \lambda.n + \mu$

$$a_1 = 2a_0 + b_0 = 1 \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}. \text{ Donc } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = n$$

$$\text{Et } b_n = a_{n+1} - 2a_n = n + 1 - 2n = 1 - n.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, M^n = n.M + (1-n)I_3 = n. \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1-n \end{pmatrix}.$$

Remarque : On pouvait également remarquer que $M = (M - I_3) + I_3$ et utiliser la formule du binôme.

Partie B – Etude du cas où $a = 0$

$$4. M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Si } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, MX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = x \\ x - z = y \\ x - y = z \end{cases} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \Leftrightarrow x = y + z.$$

$$\text{Donc } \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \text{ Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment}$$

une base de $\mathcal{F}$. Donc $\dim(\mathcal{F}) = 2$.

5. $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc M n'est pas inversible (ou par pivot)

Partie C – Etude du cas où a est différent de 0 et 1

6. $bu + cv + dw = 0 \Leftrightarrow b(1, 1, 1) + c(1, 0, 1) + d(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$ (la lettre 'a' est déjà prise)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c + d = 0 \\ b + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \text{ donc la famille est libre.}$$

De plus $\dim(E) = 3$ et $\text{card}(u, v, w) = 3$ donc c'est une base.

$$\text{Ou : la matrice de la famille } (u, v, w) \text{ dans la base canonique est : } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \quad \text{La matrice est triangulaire sans 0 sur la diagonale.}$$

Donc N est inversible. Donc la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$7. \text{Matriciellement } MU = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = aU \text{ donc } f(u) = au$$

$$AV = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V \text{ donc } f(v) = v.$$

$$8. AW = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = aV + W \text{ (ou par système) donc } f(w) = av + w.$$

9. $f(u) f(v) f(w)$

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

$$10. a) \text{ On a : } M = M_{\mathcal{B}}(f) \text{ et } T = M_{\mathcal{B}'}(f). \text{ Posons } P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, d'après la formule de changement de base, $M = P.T.P^{-1}$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11. a) Par récurrence sur n : $T^0 = I_3 \quad \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ la propriété est vraie au rang 0

_ Supposons qu'à un rang n , $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $T^{n+1} = T^n \cdot T = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n \cdot a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a + na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (n+1)a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(On pouvait également remarquer que $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et utiliser la formule du binôme de Newton)

b) Est-ce que $T^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? ($a \neq 0$ donc $1/a$ existe)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ donc l'égalité est vraie pour } n = -1.$$

12. $M = PTP^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^n & 1 & na + 1 \\ a^n & 0 & 1 \\ a^n & 1 & na \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^n + na + 2 & a^n - 1 & a^n - na - 1 \\ -a^n + 1 & a^n & a^n - 1 \\ -a^n + na + 1 & a^n - 1 & a^n - na \end{pmatrix}$$

Exercice 3 1) ${}^t 0_n = 0_n = -0_n$ donc $0_n \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

_ Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^t(M + M') = {}^t M + {}^t M' = -M - M' = -(M + M')$ donc $M + M' \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

_ Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors ${}^t(\lambda M) = \lambda {}^t M = \lambda(-M) = -\lambda M$ donc $\lambda M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. ${}^t f(M) = {}^t(({}^t A)M + MA) = {}^t({}^t A)M + {}^t(MA) = {}^t M({}^t A) + {}^t A {}^t M = {}^t M A + {}^t A {}^t M$

Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ${}^t M = -M$ donc ${}^t f(M) = -MA + {}^t A(-M) = -({}^t A M + MA) = -f(M)$. Donc $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) $\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\forall N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(M + N) = ({}^t A)(M + N) + (M + N)A = {}^t A M + {}^t A N + MA + NA = ({}^t A M + MA) + ({}^t A N + NA) = f(M) + f(N)$$

$$f(\lambda M) = {}^t A(\lambda M) + (\lambda M)A = \lambda {}^t A M + \lambda MA = \lambda({}^t A M + MA) = \lambda f(M). \quad \text{Donc } f \text{ est une application linéaire.}$$

De plus, $\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3) a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors ${}^t M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$.

$${}^tM = -M \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ d = -b \\ g = -c \\ b = -d \\ e = -e \\ h = -f \\ c = -g \\ f = -h \\ i = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ e = 0 \\ i = 0 \\ h = -f \end{cases} \text{ donc } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = (bJ + cK + fL, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3) = \text{Vect}(J, K, L)$. Donc (J, K, L) est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$b) aJ + bK + cL = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -a = 0 \\ -b = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ Donc la famille est libre.}$$

Comme elle est aussi génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est de dimension 3.

$$4) a) f(J) = {}^tAJ + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -J - L$$

$$f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L$$

$$\text{Ou : Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$

$$f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -f \\ 0 & b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & f & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & -b-f \\ 0 & b+f & 0 \end{pmatrix}$$

(on retrouve que $f(M) \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$)

$$\text{Avec } b = 1 \text{ et } c = f = 0 \text{ on trouve : } f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ De même, on trouve } f(K) = 0_3 \text{ et } f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) (J, K, L) forment une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) = \text{Vect}(-J - L, -L) = \text{Vect}(J + L, L) = \text{Vect}(J + L - L, L) = \text{Vect}(J, L)$.

Ces deux vecteurs forment une famille libre, donc une base de $\text{Im}(f)$.

c) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$.

Or $K \in \text{Ker}(f)$ et K est non nul donc forme une famille libre. Donc K est une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\text{Ou, d'après la question a, } f(M) = 0_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 \\ b = 0 \\ -b - f = 0 \\ -f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ f = 0 \end{cases} \text{ Donc } \text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(K)$$

5) $f(J) \ f(K) \ f(L)$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} J \\ K \\ L \end{matrix} \quad 6) \text{rang}(f + \text{Id}) = \text{rang}(F + I_3) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \text{ car les vecteurs ne}$$

sont pas colinéaires.