Devoir surveillé n°5 - Correction

Exercice 1

1. a) $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x} = \dfrac{a(2+x)+b(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{(a-b)x + 2a + 2b}{4-x^2}$

Par identification, $\dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{4}$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{2+x}\right)$

b. Donc $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right)dx = \frac{1}{4}\Big[-\ln(|2-x|) + \ln(|2+x|)\Big]_0^1$

$= \dfrac{1}{4}\big(-\ln(1) + \ln(3) - (-\ln(2) + \ln(2))\big) = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

2. $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\ln\big(|4-x^2|\big)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

3. a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_n - u_{n+2} = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2}\,dx = \int_0^1 x^n dx$

$= \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $4u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow u_{n+2} = 4u_n - \dfrac{1}{n+1}$ donc $\forall k \geq 2$, $u_k = 4u_{k-2} - \dfrac{1}{k-1}$

```
def suite(n):
  if (-1)**n == 1:    #Si n est pair
    u = np.log(3)/4   #u0
    for k in range (2, n+1, 2) :  #boucle de 2 en 2
      u=4*u-1/(k-1)
  else :
    u = np.log(2/np.sqrt(3))    #u1
    for k in range (3, n+1, 2):
      u=4*u-1/(k-1)
  return u
```

4. $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$ $\quad -1 \leq -x^2 \leq 0 \quad 3 \leq 4 - x^2 \leq 4$

La fonction inverse étant décroissante sur $]0; +\infty[$, $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{4-x^2} \leq \dfrac{1}{3}$

$x^n \geq 0$ donc $\dfrac{x^n}{4} \leq \dfrac{x^n}{4-x^2} \leq \dfrac{x^n}{3}$ et par croissance de l'intégrale $(0 < 1)$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4}\,dx \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3}dx$

Comme $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ (voir question précédente), $\dfrac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{3(n+1)}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4(n+1)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$, donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) $\dfrac{1}{4(n+1)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{4n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n}$ diverge (série harmonique), donc comme les séries sont à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4(n+1)}$ diverge.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$ (et les termes toujours positifs), la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge aussi.

5. a) Le graphe représente les points $(n, 3n.u_n)$, pour n de 0 à 4.

Il semble que $3n.u_n$ tende vers 1, donc que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{3n}} = 1$, donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{3n}$. (Réponse 3)

b) Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{4-x^2} \\ v'(x) = x^n \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$ (u et v sont de classe C^1 sur [0;1])

Donc $u_n = \left[\frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{4-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} \frac{2x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$

c) Posons $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$.

On sait que $\forall x \in [0,1] \quad 3 \leq 4 - x^2 \leq 4 \quad$ donc $9 \leq (4-x^2)^2 \leq 16$

et de la même manière qu'en question 4. a) $\frac{x^{n+2}}{16} \leq \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^{n+2}}{9}$

Comme $\int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{n+3} \quad \frac{1}{16(n+3)} \leq J_n \leq \frac{1}{9(n+3)}$, donc par encadrement $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3n.u_n = \frac{n}{n+1} - 2\frac{n}{n+1} J_n \qquad \frac{n}{n+1} \sim_{+\infty} \frac{n}{n} \sim_{+\infty} 1$ et $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} 3n.u_n = 1$

Donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{3n}$.

Exercice 2

1. Il y a k tirages indépendants (car avec remise). A chaque tirage, la probabilité d'obtenir la boule n°i est $\frac{1}{n}$.

X_i est le nombre de fois où on tire la boule i.

Donc $X_i \longrightarrow B\left(k, \frac{1}{n}\right)$. Donc $E(X_i) = \frac{k}{n} \quad V(X_i) = \frac{k}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k(n-1)}{n^2}$.

2. a) $P((X_i = k) \cap (X_j = k)) = 0$ (événement impossible), alors que $P(X_i = k)P(X_j = k) \neq 0$.
Donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.
b) Plus on tire la boule n°i, moins on tire la boule n°j donc quand X_i est grand, X_j a tendance à être petit.
Donc $\text{cov}(X_i, X_j) < 0$.
c) $X_i + X_j$ est le nombre d'obtentions des boules i et j lors des k premiers tirages. (probabilité 2/n à chaque tirage).

De même que pour la question1, on a donc $X_i + X_j \longrightarrow B\left(k, \frac{2}{n}\right)$. et $V(X_i + X_j) = k\frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k(n-2)}{n^2}$

d) $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\text{cov}(X_i, X_j)$ donc $\frac{2k(n-2)}{n^2} = \frac{2k(n-1)}{n^2} + 2\text{cov}(X_i, X_j)$

$\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{k(n-2) - k(n-1)}{n^2} = -\frac{k}{n^2}$. *(On retrouve bien que $\text{cov}(X_i, X_j) < 0$)*

Exercice 3

1) a) La probabilité de faire pile est p. Il y a n lancers indépendants. X est le nombre de piles obtenus. Donc $X \longrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p)$.

b) D'après la formule de Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad np(1-p) = E(X^2) - n^2p^2$
$E(X^2) = np(1 - p + np)$
2) Si $(X = 0)$ on tire dans l'urne n°0 : (0 vertes, n rouges) donc $P_{(X=0)}(Y = 0) = P_{U0}(R) = 1$
Si $(X = n)$ on tire dans l'urne n°n : (n vertes, 0 rouges) donc $P_{(X=n)}(Y = 0) = P_{Un}(R) = 0$.
Si X et Y sont indépendantes alors $P_{(X=0)}(Y = 0) = P(Y = 0)$ et $P_{(X=n)}(Y = 0) = P(Y = 0)$
$P_{(X=0)}(Y = 0) \neq P_{(X=n)}(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
Ou : $P((X = n)\cap(Y = 0)) = 0$ et $P(X = n) \neq 0 \quad P(Y = 0) \neq 0$ donc
$P((X = n)\cap(Y = 0)) \neq P(X = n) \times P(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Si $(X = k)$ on tire dans l'urne n°k : (n boules dont k vertes) donc $P_{(X=k)}(Y = 1) = P_{Uk}(V) = \frac{k}{n}$

c) $(X = k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) \times \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k.P(X = k) = \frac{E(X)}{n}.$$

d) $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$. Donc $Y \longrightarrow \mathcal{B}(p) \quad E(Y) = p$

3) a) Plus X est grand, plus la proportion de boules vertes dans l'urne est grande, donc plus la probabilité que Y soit égale à 1 est grande. Donc $cov(X, Y) > 0$.
b) D'après le théorème de transfert,

$$E(XY) = \sum_{0 \le k \le n,\ 0 \le i \le 1} k.i.P((X = k) \cap (Y = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k.0.P((X = k) \cap (Y = 0)) + \sum_{k=0}^{n} k.1.P((X = k) \cap (Y = 1))$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{n} k.P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2P(X = k)}{n} = \frac{1}{n} E(X^2)$$

c) $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{n} E(X^2) - E(X)\frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}(E(X^2) - E(X)^2) = \frac{1}{n} V(X)$

$= p(1 - p)$.

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{p(1-p)}} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

```
def lois_XetY(n, p):
   X=rd.binomial(n,p)
   if rd.random()<X/n:
      Y=1
   else:
      Y=0
   return (X,Y)
```

Exercice 4 1. $\forall k \geq 1$, $P(X_1 = k) = q^{k-1}p \quad E(X_1) = \frac{1}{p} \quad V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$

2. $P(\Delta = 0) = P(|X_1 - X_2| = 0) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k)\cap(X_2 = k))$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$ (X_1, X_2 indépendantes) $= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p\, q^{k-1}p = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1}$

Posons k' = k – 1 : $P(\Delta = 0) = p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} (q^2)^{k'} = p^2 \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q}$.

3. a) $P(X_1 - X_2 = n) = P(X_1 = X_2 + n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_2 = k) \cap (X_1 = n + k))$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)\, P(X_1 = n + k)$ (car X_1, X_2 indépendantes)

b) Donc $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{n+k-1}p = q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{k-1}p = q^n P(\Delta = 0) = \frac{pq^n}{1+q}$.

$n \geq 1$ donc $P(\Delta = n) = P(|X_1 - X_2| = n) = P(X_1 - X_2 = n) + P(X_1 - X_2 = -n)$

$= P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n)$

X_1 et X_2 ont des rôles symétriques, donc $P(\Delta = n) = 2P(X_1 - X_2 = n) = \frac{2pq^n}{1+q}$.

4) a) $\sum_{n \geq 0} nP(\Delta = n) = 0 \times P(\Delta = 0) + \sum_{n \geq 1} n\frac{2pq^n}{1+q} = 0 + \frac{2pq}{1+q} \sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$

$-1 < q < 1$ donc la série converge (absolument). Donc Δ admet une espérance et

$E(\Delta) = \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2pq}{(1+q)p^2} = \frac{2q}{p(1+q)}$

b) $E\big((X_1 - X_2)^2\big) = E\big(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2\big)$

$= E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2)$ par linéarité de l'espérance

$= E(X_1^2) - 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2^2)$ car X_1, X_2 indépendantes

$= E(X_1^2) - 2E(X_1)^2 + E(X_1^2)$ (car X_1 et X_2 même loi) $= 2(E(X_1^2) - E(X_1)^2) = 2V(X_1)$

$E(\Delta^2) = E(|X_1 - X_2|^2) = E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1) = \frac{2q}{p^2}$

donc Δ admet une variance et

$V(\Delta) = E(\Delta^2) - E(\Delta)^2 = \frac{2q}{p^2} - \left(\frac{2q}{p(1+q)}\right)^2 = \frac{2q(1+q)^2 - 4q^2}{p^2(1+q)^2} = \frac{2q(1+q^2)}{p^2(1+q)^2}$

5. A $\Leftrightarrow$ $\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2) \Leftrightarrow X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$

_ si $X_1 > X_2$ $\max(X_1, X_2) = X_1$ $\min(X_1, X_2) = X_2$ $\Delta = |X_1 - X_2| = X_1 - X_2$

_ si $X_1 \leq X_2$ $\max(X_1, X_2) = X_2$ $\min(X_1, X_2) = X_1$ $\Delta = |X_1 - X_2| = X_2 - X_1$

donc $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$ donc A $\Leftrightarrow \Delta > X_3$.

6. a) $P(A) = P(\Delta > X_3) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((\Delta = k) \cap (X_3 > k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k)\, P(X_3 > k)$ (car Δ et X_3 indépendantes)

$= P(\Delta = 0)P(X_3 > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\Delta = k)\, P(X_3 > k)$

Or $(X_3 > k)$ = "les k premiers sont des échecs" $P(X_3 > k) = q^k$.

Donc $P(A) = \frac{p}{1+q} \times 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2pq^k}{1+q} q^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q}\left(\frac{1}{1-q^2} - 1\right)$

$= \frac{p}{1+q}\left(1 + \frac{2}{1-q^2} - 2\right) = \frac{p}{1+q}\, \frac{2-(1-q^2)}{1-q^2} = \frac{p(1+q^2)}{(1+q)(1-q^2)} = \frac{(1+q^2)}{(1+q)^2}$