D.S. n°6 - Correction

Exercice 1

1. $(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

2. Le polynôme $(X - 1)^2$ est donc un polynôme annulateur de M.
Les seules valeurs propres possibles de M sont les racines de $(X - 1)^2$.
Donc la seule valeur propre possible de M est 1.

3. 0 n'est pas valeur propre de M, donc M est inversible.
Or $M - I_3$ n'est pas inversible (car $C_2 = 0$ ou $C_3 = -C_1$). Donc 1 est valeur propre de M.

Si M est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Donc $M = PI_3P^{-1} = I_3$. Or $M \neq I_3$, donc M n'est pas diagonalisable.
(on peut aussi chercher $E_1(M)$ qui est de dimension $2 < 3$)

Exercice 2

Partie I 1. a) $\text{rang}(A - 2I) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ car le vecteur est non nul.

b) $\text{rang}(A - 2I) < 3$, donc $A - 2I$ n'est pas inversible. Donc 2 est valeur propre de A.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(E_2) = 3 - \text{rang}(A - 2I) = 3 - 1 = 2$.

c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$

Donc $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre, donc ils forment une base de E_2.

d) La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à 3. Donc au maximum, A admet encore une valeur propre, avec un sous-espace propre de dimension 1.

2. a) Notons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors $MU = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ d + e + f \\ g + h + i \end{pmatrix}$.

MU est un vecteur colonne qui contient la somme par ligne des coefficients de M.

b) On a donc $AU = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$, et $U \neq 0$ donc 5 est aussi valeur propre de A, et U est un vecteur propre associé. Comme $\dim(E_5) \geq 1$ (car 5 est valeur propre) et $\dim(E_5) \leq 1$ (d'après question 1.d), on a :
$\dim(E_5) = 1$
$U \in E_5$ et $U \neq 0$ (donc famille libre), donc U est une base de E_5.

3. $\dim(E_2) + \dim(E_5) = 3$ donc A est diagonalisable et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres. (On peut également remarquer que A est diagonalisable car elle est symétrique).

D'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Partie II

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ valeur propre de B $\Leftrightarrow$ $B - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow$ $\det(B - \lambda I_2) = 0$

$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

B admet une seule valeur propre : 1

5. Si B est diagonalisable, alors il existe P inversible et D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$,

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Donc $B = PI_2P^{-1} = I_2$.

Or $B \neq I_2$ donc B n'est pas diagonalisable.

Ou : avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(B - I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$. Donc $E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

donc $\dim(E_1(B)) = 1 < 2$. Donc B n'est pas diagonalisable.

6. a) Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre.

De plus $\mathrm{card}(v_1, v_2) = 2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Matriciellement : $BV_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1$ $\quad BV_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1 + V_2$.

Donc $T = M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc : $M_{\mathcal{B}}(f) = B \quad M_\beta(f) = T$

Posons $Q = P_{\mathcal{B},\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors d'après la formule de changement de base, $B = QTQ^{-1}$.

Exercice 3

. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n e^{-x2/2a2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} x^{n+2}e^{-x2/2a2} = 0$ par croissances comparées. Donc $x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Les deux fonctions sont positives et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente, donc I_n est convergente.

2. ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \frac{-2x}{2a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) = -\frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$

Soit $X \geq 0$. $\int_0^X x^1\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) = \left[-a^2\phi(x)\right]_0^X = -a^2\phi(X) + a^2\phi(0) = -a^2\exp\left(-\frac{X^2}{2a^2}\right) + a^2$

$\displaystyle\lim_{X \to +\infty} -a^2\exp\left(-\frac{X^2}{2a^2}\right) + a^2 = a^2$ donc $I_1 = a^2$.

3) a) Intégration par parties : $u(x) = x^{n-1}$ $\quad v'(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$

donc $u'(x) = (n-1)x^{n-2}$ $\quad v(x) = -a^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$.

Donc $\int_0^t x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = \left[-a^2x^{n-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\right]_0^t + \int_0^t (n-1)x^{n-2}a^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$

$\int_0^t x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = -a^2t^{n-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) + (n-1)a^2\int_0^t x^{n-2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$

b) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty}\int_0^t x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = I_n$ $\quad \displaystyle\lim_{t \to +\infty} -a^2t^{n-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) = 0$ (croissances comparées)

$\displaystyle\lim_{t \to +\infty}\int_0^t x^{n-2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx = I_{n-2}$ $\quad$ donc $I_n = (n-1)a^2I_{n-2}$.

c) Donc $I_2 = (2-1)a^2I_0 = a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\quad I_3 = 2a^2I_1 = 2a^4$.

4. $\int_{-\infty}^0 g_a(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx$ converge et vaut 0.

$\int_0^{+\infty} g_a(x)dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$ converge car I_1 converge et vaut $\frac{1}{a^2} \times a^2 = 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

5. si $x < 0$ $G_a(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$ si $x \geq 0$, $G_a(x) = \int_{-\infty}^{0} g_a(t)dt + \int_0^x g_a(t)dt = 0 + \frac{1}{a^2}\int_0^x t\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)dt = \frac{1}{a^2}$

$\left(-a^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) + a^2\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ $G_a(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

6. De même, $\int_{-\infty}^{0} x.g_a(x)dx$ converge et vaut 0.

$\int_0^{+\infty} x.g_a(x)dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$ converge car I_2 converge et vaut $\frac{1}{a^2} \times a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x.g_a(x)dx$ converge et vaut $a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

7. De même, $\int_{-\infty}^{0} x^2g_a(x)dx$ converge et vaut 0.

$\int_0^{+\infty} x^2g_a(x)dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x^3\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)dx$ converge car I_3 converge et vaut $\frac{1}{a^2} \times 2a^4 = 2a^2$.

Exercice 4

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = \int_0^1 (1-t)^{k-1}t.1.dt = \int_0^1 (1-t)^{k-1}(t - 1 + 1)dt = \int_0^1 \left(-(1-t)^k + (1-t)^{k-1}\right)dt$

$= \left[\frac{1}{k+1}(1-t)^{k+1} - \frac{1}{k}(1-t)^k\right]_0^1 = 0 - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

(on peut également faire une intégration par parties)

2) a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Z = k) = \int_0^{+\infty} \frac{t^ke^{-t}}{k!}\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda.e^{-(\lambda+1)t}dt$

Changement de variable : $x = (\lambda + 1)t \Leftrightarrow t = \frac{x}{\lambda+1}$ donc $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda+1}$ « $dt = \frac{1}{\lambda+1}dx$ »

Les bornes sont inchangées. Donc $P(Z = k) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\lambda+1}\right)^k \lambda e^{-x}\frac{1}{\lambda+1}dx = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx$

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $I_k = \int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx$.

Pour $k = 0$ $I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{x^0}{0!}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

Posons $X \geq 0$ $\int_0^X e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^X = -e^{-X} + 1$ $\lim\limits_{X\to+\infty} -e^{-X} + 1 = 1$ donc $I_0 = 1$.

Supposons qu'à un rang k, $I_k = 1$.

Soit $X \geq 0$. Notons $I_{k+1}(X) = \int_0^X \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}dx$

Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\ v'(x) = e^{-x}\end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{x^k}{k!} \\ v(x) = -e^{-x}\end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $I_{k+1}(X) = \left[-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}\right]_0^X + \int_0^X \frac{x^k}{k!}e^{-x}dx = -\frac{X^{k+1}e^{-X}}{(k+1)!} + I_k(X)$.

$\lim\limits_{X\to+\infty} X^{k+1}e^{-X} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{X\to+\infty} I_k(X) = I_k = 1$ par hypothèse de récurrence.

Donc $I_{k+1} = 1$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx = 1$.

c) Donc $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(Z = k) = \dfrac{\lambda}{(\lambda + 1)^{k+1}}$.

Posons $Z' = Z + 1$ $\quad Z'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \geq 1$, $P(Z' = k) = P(Z = k - 1) = \dfrac{\lambda}{(\lambda + 1)^{k}} = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\left(\dfrac{1}{\lambda + 1}\right)^{k-1}$

$= \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^{k-1}\dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$ donc $Z' \longrightarrow G\left(\dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\right)$.

d) Donc $E(Z') = \dfrac{1}{\frac{\lambda}{\lambda + 1}} = \dfrac{\lambda + 1}{\lambda} = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad Z = Z' - 1$ donc $E(Z) = E(Z') - 1 = \dfrac{1}{\lambda}$.