Devoir Surveillé n°8 - Correction

Exercice 1

1) D'après les lignes de niveau, il semble y avoir un minimum local en (1,1), qui vaut 3.

2) f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ comme somme et quotients de fonctions usuelles de classe C^2. (les dénominateurs ne s'annulant pas).

b) $\forall x > 0, \forall y > 0, \partial_1 f(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$ et $\partial_2 f(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$

(x, y) point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2y^2} = 0 \\ \frac{-2x + 2y^4}{y^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ -2x + 2y^4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \text{ (car x et y positifs)} \\ -x + x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 0 \text{ ou } x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 \end{cases}$ car $x \neq 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Donc f admet un unique point critique : A(1, 1).

c) $\forall x > 0, \forall y > 0, \partial^2_{1,1} f(x, y) = \frac{2}{x^3}$ $\quad \partial^2_{2,1} f(x, y) = -\frac{2}{y^3}$ $\quad \partial^2_{1,2} f(x, y) = -\frac{2}{y^3}$ $\quad \partial^2_{2,2} f(x, y) = \frac{6x}{y^4} + 2$

Donc $H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(1,1) & \partial^2_{1,2} f(1,1) \\ \partial^2_{2,1} f(1,1) & \partial^2_{2,2} f(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $H - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 8 - \lambda \end{pmatrix}$.

λ valeur propre de H $\Leftrightarrow H - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow (2 - \lambda)(8 - \lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0$

$\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a} = 12 > 0$ donc les deux valeurs propres sont non nulles et de même signe.

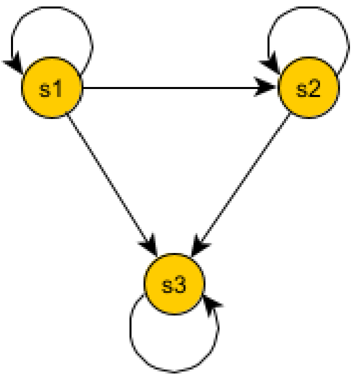
Et $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} = 10 > 0$ donc les deux valeurs propres sont positives.

Les deux valeurs propres sont strictement positives, donc il s'agit d'un minimum local. Et f(1, 1) = 3.

Ou : $\Delta = 100 - 48 = 52$ $\quad$ 2 racines : $\lambda_1 = \frac{10 + 2\sqrt{13}}{2} = 5 + \sqrt{13} > 0$ $\quad \lambda_2 = 5 - \sqrt{13} < 0$.

Exercice 2

1.



2. On voit que $A = I_3 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = 0_3.$$

I_3 et B commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 I_3^n + \binom{n}{1} B^1 I_3^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 I_3^{n-2} + 0_3 \text{ (pour } n \geq 2)$$

$$= I_3 + n.B + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car } n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour n = 0 $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la formule est encore vraie. Pour n = 1 $A^0 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la formule est encore vraie.

3) $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Il y a donc 10 chemins entre s_1 et s_3 (valeur ligne 1 – colonne 3 de A^4).

Exercice 3

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$

_ si x < 0 : l'inéquation n'a pas de solution $F_Y(x) = 0$

_ si $x \geq 0$: $F_Y(x) = P(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$

$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2\Phi(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

2) F_Y est de continue et de classe C^1 sur $]-\infty\,;0[$ comme fonction nulle et sur $]0\,;+\infty[$ car Φ l'est.

De plus $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} 2\Phi(x) - 1 = 2\Phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ (car Φ est continue en 0).

Donc F_Y est continue en 0.

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, donc Y est une variable à densité.

$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2\Phi'(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ Donc une densité de Y est $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 4

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y'}(x) = P(Y' \leq x) = P(-\ln(Y) \leq x) = P(\ln(Y) \geq -x) = P(Y \geq e^{-x}) = 1 - F_Y(e^{-x})$.

Or, $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ 1 - e^{-y} \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $F_{Y'}(x) = 1 - (1 - \exp(-e^{-x})) = \exp(-e^{-x})$

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x) = P(\text{"tous sont} \leq x\text{"}) = P((X_1 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x))$
$= P(X_1 \leq x) \ldots P(X_n \leq x)$ par indépendance

$= F_{X_1}(x)^n$ (car $X_1, \ldots, X_n$ même loi) $F_{T_n}(x) = \frac{1}{(1 + e^{-x})^n}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$P(W_n \leq x) = P(T_n - \ln(n) \leq x) = P(T_n \leq x + \ln(n)) = \frac{1}{(1 + e^{-x-\ln(n)})^n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{e^{\ln(n)}}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{n}$ $\quad -n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} -e^{-x}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ et par continuité de la fonction exp $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp(-e^{-x})$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{W_n}(x) = F_{Y'}(x)$, où Y' est la VAR définie dans la première question.

Donc la suite (W_n) converge en loi vers Y', qui suit une loi de Gumbel.

3. a) Les variables (X_n) sont indépendantes et admettent une même espérance 0 et une même variance.
Donc d'après la loi faible des grands nombres, la moyenne Z_n est proche de 0 (l'espérance de X) quand n est grand.

b) $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ donc par linéarité, $E(Z_n) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = 0$

$V(Z_n) = \frac{1}{n^2}V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + \dots + V(X_n))$ (par indépendance) $= \frac{1}{n^2} n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

c) Les variables (X_n) sont indépendantes, de même loi et admettent une espérance et une variance non nulle.

Donc d'après le théorème de la limite centrée, $Z_n^* = \frac{Z_n - E(Z_n)}{\sigma(Z_n)} = \frac{Z_n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{Z_n\sqrt{n}}{\sigma}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq Z_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(-1 \leq Z_n^* \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$
$\approx 2 \times 0{,}8413 - 1 \approx 0{,}6826$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = P(V \leq x) = P\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq x\right) = P\left(\frac{U}{1-U} \leq e^x\right)$

$0 < U < 1$ donc $1 - U > 0$. Donc $F_V(x) = P(U \leq (1-U)e^x) = P(U + Ue^x \leq e^x)$

$= P(U(1+e^x) \leq e^x) = P\left(U \leq \frac{e^x}{1+e^x}\right)$ (car $1 + e^x > 0$) $= F_U\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ $1 + e^x > 0$ donc $\frac{e^x}{1+e^x} > 0$ $\quad 0 < 1$ donc $e^x < e^x + 1$ donc $\frac{e^x}{e^x+1} < 1$

Donc $0 \leq \frac{e^x}{e^x+1} \leq 1$

donc $F_V(x) = F_U\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1}{1+e^{-x}}$. V suit la même loi que X.

c)
```
u=rd.random()
v=np.log(u/(1-u))
```

Remarque : C'est un cas particulier de la méthode d'inversion (voir chapitre 16 feuille n°1, exercice 2) :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]0;1[$, $F(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} = y \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$ donc $F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

d)
```
def Z(n) :
    u=rd.random(n)
    v=np.log(u/(1-u))
    return np.mean(v)
```