

Révisions Algèbre linéaire – Correction

Exercice 1

	Entrée	Sortie
$Ex : Limite(...)$	<i>Suite, fonction</i>	<i>Réel (ou ∞)</i>
$Vect(...)$	Vecteur, Fam Vect	SEV, EV
$Ker(...)$	Endo, AL	SEV
$Im(...)$	Endo, AL	SEV
$u(...)$ (u endomorphisme, AL)	Vecteur	Vecteur
$card(...)$	Fam Vect	$\mathbb{N}$
$dim(...)$	SEV, EV	$\mathbb{N}$
$base(...)$	SEV, EV	Fam Vect
$rang(...)$	Matrice, Fam Vect, endo, AL	$\mathbb{N}$

Exercice 2

1) $0_2^2 = 0_2$ donc $0_2 \in \mathcal{F}$.

$I_2^2 = I_2$ donc $I_2 \in \mathcal{F}$. Mais $(2I_2)^2 = 4I_2 \neq 2I_2$ donc $2I_2 \notin \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

${}^t0_2 = 0_2$ et $-0_2 = 0_2$ donc $0_2 \in \mathcal{G}$.

$\forall M \in \mathcal{G}, \forall M' \in \mathcal{G}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

${}^t(M + M') = {}^tM + {}^tM' = -M - M' = -(M + M')$ donc $M + M' \in \mathcal{G}$.

${}^t(\lambda M) = \lambda {}^tM = \lambda(-M) = -(\lambda M)$ donc $\lambda M \in \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$${}^tM = -M \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ b = b \\ d = 0 \end{cases} \text{ donc } \mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Le vecteur est non nul, donc forme une base de $\mathcal{G}$.

Exercice 3

1) Soit $P = aX^2 + bX + c$. Alors $P' = 2aX + b$

$$f(P) = 2X(aX^2 + bX + c) - (X^2 - 1)(2aX + b) = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - (2aX^3 + bX^2 - 2aX - b) = bX^2 + (2a + 2c)X + b \text{ donc } f(P) \in \mathbb{R}_2[X].$$

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(P + Q) = 2X(P + Q) - (X^2 - 1)(P + Q)' = 2XP + 2XQ - (X^2 - 1)(P' + Q') = 2XP - (X^2 - 1)P' + 2XQ - (X^2 - 1)Q' = f(P) + f(Q)$$

$$f(\lambda P) = 2X(\lambda P) - (X^2 - 1)(\lambda P)' = 2X\lambda P - (X^2 - 1)\lambda P' = \lambda(2XP - (X^2 - 1)P') = \lambda f(P).$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) a) D'après l'écriture précédente de $f(P)$:

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}. \text{ Donc } \text{Ker}(f) = \{ aX^2 - a, a \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(X^2 - 1).$$

$\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas bijective.

b) $(1, X, X^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2))$

avec (d'après la question 1.) : $f(1) = 2X$ $f(X) = X^2 + 1$, $f(X^2) = 2X$. $\text{Im}(f) = \text{Vect}(X^2 + 1, 2X)$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre, donc une base de $\text{Im}(f)$.

3) a) D'après la question précédente $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) f n'est pas bijective, donc A n'est pas inversible (ou $C_1 = C_3$). Donc 0 est valeur propre de A .

$$\text{c) } \text{rang}(A - 2I_3) = \text{rang} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) = \text{rang} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \quad u_3 = -u_1 - 2u_2$$

$$= \text{rang} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2 \text{ (les vecteurs ne sont pas colinéaires)}$$

Donc $A - 2I_3$ n'est pas inversible, donc 2 est valeur propre.

D'après le théorème du rang, $\dim(E_2(A)) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) - \text{rang}(A - 2I_3) = 3 - 2 = 1$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = 4A \text{ donc } f^3 = 4f.$$

c) $A^3 - 4A = 0$ donc $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

$X^3 - 4X = X(X^2 - 4) = X(X - 2)(X + 2)$, donc les seules valeurs propres possibles sont 0, 2 et -2.

On sait déjà que 0 et 2 sont valeurs propres.

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C_1 - 2C_2 + C_3 = 0 \text{ donc } A + 2I_3 \text{ n'est pas inversible donc } -2 \text{ est valeur propre.}$$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A admet 3 valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad C_1 - C_3 = 0 \text{ donc un vecteur propre est } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C_1 + 2C_2 + C_3 = 0 \quad \text{VP : } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A + 2I_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme chaque sous-espace propre est de dimension 1, ils forment chacun une base de leur sous-espace propre.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\text{D'après la formule de changement de base, } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$