Algèbre linéaire – Exercices de révision

Exercice 1 – Ne pas confondre !

EV : espace vectoriel
SEV : sous-espace vectoriel
Vecteur : vecteur
Fam. Vect. : famille de vecteurs
Matrice : matrice
Endo : endomorphisme
AL : application linéaire
$\mathbb{N}$: nombre entier

	Entrée	Sortie
Ex : Limite(...)	*Suite, fonction*	*Réel (ou ∞)*
Vect(…)		
Ker(…)		
Im(…)		
u(…) (u endomorphisme, AL)		
card(…)		
dim(…)		
base(…)		
rang(…)		

Exercice 2

Soit $\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, M^2 = M \}$ et $\mathcal{G} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, {}^tM = -M \}$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base.

Exercice 3

On considère l'application f, qui a un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme

$$f(P) = 2X.P - (X^2 - 1)P'.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) a) Déterminer une base de Ker f. f est-elle bijective ?
b) Déterminer une base de Im f.
3) a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
b) Donner sans calcul une valeur propre de A.
c) Déterminer le rang de la matrice $A - 2I_3$. En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre correspondant.
d) Déterminer l'endomorphisme $f^3 - 4f$.
e) A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice P inversible (avec une première ligne ne contenant que des 1) et une matrice D diagonale (avec des coefficients diagonaux croissants) telles que $A = PDP^{-1}$.