ECG2 : Fiche algèbre linéaire

1. Systèmes linéaires et matrices

Un système est **de Cramer** si et seulement s'il admet une **unique solution**.

Un système **triangulaire** est **de Cramer** si et seulement si les **coefficients diagonaux sont tous non nuls**.

Opérations autorisées sur les lignes :
_ échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
_ multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.
_ combinaison de deux lignes : $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ avec $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ **et $\boldsymbol{L_j}$ fixe.**

Remarques :
_ Dans le cas $\begin{cases} ax + \dots \\ bx + \dots \end{cases}$, pour éliminer x dans L_2, on peut faire : $L_2 \leftarrow bL_1 - aL_2$ (si $a \neq 0$)
_ Si le pivot s'annule, changer de pivot !

Matrices inversibles :
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.B = I_n$ (ou $B.A = I_n$).

Méthodes pour étudier l'inversibilité :
_ multiplier par une matrice "candidate" pour vérifier que le produit est égal à I_n
_ transformer une égalité en $A * \dots = I_n$
_ pour montrer que A non inversible : par l'absurde : supposer que A est inversible et arriver à une contradiction
_ utiliser les matrices diagonales, triangulaires, …
_ $ad - bc \neq 0$ dans le cas de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
_ le système correspondant est un système de Cramer
_ les colonnes de A forment une famille libre
_ produit de matrices inversibles
_ pivot de Gauss

Méthodes pour calculer $\boldsymbol{A^n}$:
_ matrices diagonales
_ par récurrence (parfois avec suites indéterminées)
_ formule du binôme de Newton :

$$\text{si } A = B + C \text{ avec } BC = BC \text{ alors } \forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = (B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$$

_ si $A = P.B.P^{-1}$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.B^n.P^{-1}$

2. Sous-espaces vectoriels, bases et dimension

Soit $\mathcal{F}$ une partie d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ si :

$$\begin{cases} 0 \in \mathcal{F} \\ \forall X \in \mathcal{F}, \forall X' \in \mathcal{F}, X + X' \in \mathcal{F} \\ \forall X \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Remarques : _ *Si* $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$, alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.
_ $X_1, \dots, X_n$ famille génératrice de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$
_ Pour trouver une famille génératrice, il faut **résoudre** l'équation ou le système.

Définition : Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de $\mathcal{E}$.
$\mathcal{B}$ est une **base** de $\mathcal{E}$ si c'est une **famille libre et génératrice**.

Bases canoniques :

_ de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (n vecteurs)

_ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, etc… (n × p vecteurs)

_ de $\mathbb{R}_n[X]$: $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$, …, $e_n = X^n$ (n + 1 vecteurs)

Propriété : **Toutes les bases d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ ont le même cardinal. Il est appelé dimension de $\mathcal{E}$.**

En particulier $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$

Propriété : Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de finie.
Alors **toute famille libre de cardinal égal à la dimension de $\mathcal{E}$ est une base de $\mathcal{E}$.**

Coordonnées : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$. Alors tout élément X de $\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique $X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont des réels appelés coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice d'une famille dans une base :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n))$ une famille d'éléments de $\mathcal{E}$.
_ La matrice de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$ est la matrice notée $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, qui contient en colonnes les coordonnées de $f_1, \dots, f_n$ dans la base $\mathcal{B}$.
_ **$\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{E}$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible**. Dans ce cas, cette matrice est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et est notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$
_ donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une famille libre.

Rang d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ = dimension de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$
$\mathrm{rang}(x_1, \dots, x_n) = n \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ famille libre

Rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ = rang de ses vecteurs colonnes
$\mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A)$ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{rang}(A) = n \Leftrightarrow A$ est inversible