# 1. Applications linéaires

Définition :

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels et f : $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$.
f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall X, X' \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(X + X') = f(X) + f(X') \\ f(\lambda X) = \lambda f(X) \end{cases}$$

_ si f est une application linéaire et si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, f est un **endomorphisme**
_ si f est une application linéaire bijective, f est un **isomorphisme**
_ si f est un endomorphisme et si f est bijective, f est un **automorphisme**.

Noyau, image : Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
_ **Ker f** est l'ensemble des antécédents de 0 par f. Ker f = $\{x \in \mathcal{E} \ / \ f(x) = 0\}$
_ **Im f** est l'ensemble des images de $\mathcal{E}$ par f. Im f = $\{f(x), x \in \mathcal{E}\}$
Ker f est un s.e.v. de $\mathcal{E}$, Im f est un s.e.v. de $\mathcal{F}$.

Propriété : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$, alors **Im f = Vect((f($e_1$), …, f($e_n$))**.

Propriété : _ f est **injective** si et seulement si **Ker f = {0}**
_ f est surjective si et seulement si Im f = $\mathcal{F}$.

Théorème du rang : si $\mathcal{E}$ de dimension finie, dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim($\mathcal{E}$).

Propriété :
Si f **endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension finie**, alors
**f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective**

## 2. Matrice d'un endomorphisme

Définition :

Soit f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$.
On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice, notée $M_{\mathcal{B}}(f)$ qui contient en colonnes les **coordonnées de $f(e_1), \ldots, f(e_n)$** dans la base $\mathcal{B}$ = **$(e_1, \ldots, e_n)$**.

Remarques :

_ Soit $x \in E$. On pose $y = f(x)$.
Si on note $X = M_B(x)$ $Y = M_B(y)$ et $A = M_B(f)$ alors **$Y = AX$**
_ $f = g \Leftrightarrow M_B(f) = M_B(g)$

_ Si f et g sont des endomorphismes de E et p un entier naturel,

$$M_B(id_E) = I_n \quad M_B(g \circ f) = M_B(g) \times M_B(f) \quad M_B\left(f^{\,p}\right) = \left(M_B(f)\right)^p$$

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A**, l'endomorphisme défini par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, **$f(X) = A.X$**

Propriété :

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et A la matrice de f dans une base B de $\mathcal{E}$.
Alors **f est bijective $\Leftrightarrow$ A est inversible**. Dans ce cas, $M_B(f^{-1}) = A^{-1}$.

**Rang d'un endomorphisme f de E =** dim(Im(f))
= rang(A) si $A = M_B(f)$, où B est une base de E

Propriété : **Formule de changement de base**

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$.
Si $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, alors on a :

$$\mathbf{A = PA'P^{-1}}$$

**Utilisations de $A = PA'P^{-1}$ :**

_ calcul de $A^{-1}$ : si A' inversible, alors A aussi (produit de matrices inversibles) et
$A^{-1} = (PA'P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}A'^{-1}P^{-1} = PA'^{-1}P^{-1}$
_ calcul de $A^n$ : si $A = PA'P^{-1}$, $A^n = PA'^nP^{-1}$.
_ résolution d'une équation matricielle : changement d'inconnue, avec $N = P^{-1}MP$ (par exemple) :

Equation en M
$\downarrow$ avec $N = P^{-1}MP$
Equation en N
$\downarrow$ Résolution de l'équation en N (en général avec coefficients indéterminés)
Résultat en N
$\downarrow$ avec $M = PNP^{-1}$
Résultat en M