Fiche : Intégrales impropres

1. Définition

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a ; +\infty[$.
Si $\int_a^X f(x)dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
Dans ce cas, $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty}\left(\int_a^X f(x)dx\right)}$

_ ne pas faire de calculs avec le symbole $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ tant que l'existence n'est pas prouvée !
_ ne pas utiliser de primitives ou d'intégrations par parties sur des intégrales impropres. Se ramener d'abord au segment [a ;X], puis passer à la limite. Idem pour un changement de variable non affine.
_ définition similaire pour un intervalle du type $]-\infty;a]$
_ pour l'intervalle $]-\infty; +\infty[$: choisir un réel c, et étudier séparément les deux côtés

2. Intégrales de référence

Si $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha > 1}$. (résultat analogue en $-\infty$)
$\int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-\alpha x}dx}$ converge si et seulement si $\boldsymbol{\alpha > 0}$

3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Pour déterminer l'expression de F, il faut en général distinguer les cas, et "découper le chemin entre $-\infty$ et x".

4. Intégrales et parité

Soit f une fonction continue (ou par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
Si $\int_0^{+\infty}$ **f(x)dx converge** et si f est **paire**, alors $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx}$.
Si $\int_0^{+\infty}$ **f(x)dx converge** et si f est **impaire**, alors $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0}$.

5. Comparaisons des fonctions positives

Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur l'intervalle $[a ; +\infty[$.
_ si $\boldsymbol{\forall x \in [a ; +\infty[, f(x) \leq g(x)}$ ou si $\boldsymbol{f(x) =_{+\infty} o(g(x))}$
et **si** $\int_a^{+\infty}$ **g(x)dx converge**, alors $\int_a^{+\infty}$ **f(x)dx converge**
_ si $\boldsymbol{f(x) \sim_{+\infty} g(x)}$ alors $\int_a^{+\infty}$ **f(x)dx converge** $\Leftrightarrow$ $\int_a^{+\infty}$ **g(x)dx converge**.

Remarques :
_ en $+\infty$, penser à comparer à une intégrale de Riemann, en particulier à $1/x^2$.
_ pour des questions du type : a) Montrer que l'intégrale est convergente
b) Calculer la valeur de l'intégrale
Il faut, dans la question a, comparer l'intégrale à une intégrale de référence, puis dans la question b, calculer l'intégrale sur un segment, puis passer à la limite.

Attention : Pensez à **utiliser les résultats sur les lois usuelles** (VAR densité)