

ECG2 : Fiche réduction

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow$ il existe $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$
 $\Leftrightarrow$ le système $(A - \lambda I_n)X = 0$ n'est pas de Cramer
 $\Leftrightarrow$ la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Comment trouver les valeurs propres de A ?

- _ soit on nous donne les valeurs propres, ou les vecteurs propres (directement ou par identification dans D ou P), et il suffit de vérifier.
- _ soit A est **triangulaire**, et il suffit de les lire sur la diagonale
- _ soit on trouve un **polynôme annulateur** P : les **seules valeurs propres possibles** sont alors les racines de P .
- _ soit on cherche à quelle(s) condition(s) sur λ , le système $AX - \lambda X = 0$ n'est pas de Cramer ($\Leftrightarrow$ la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible).
- _ en particulier **0 est valeur propre si A n'est pas inversible**

Sous-espace propre :

Si λ valeur propre : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\}$

Si u est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A (c'est-à-dire : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), u(X) = AX$)

λ valeur propre de $A \Leftrightarrow u - \lambda \text{id}$ non bijectif

Dans ce cas $E_\lambda(A) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$

En particulier : **0 valeur propre de $A \Leftrightarrow u$ non bijectif.**

Dans ce cas, $E_0(A) = \text{Ker}(u)$.

Théorème du rang : $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$

Propriété :

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.

Une famille obtenue par "regroupement" de bases de chacun des sous-espaces propres est une famille libre de E .

Avec les mêmes hypothèses qu'auparavant :

A est **diagonalisable** $\Leftrightarrow$ il existe une **base** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de **vecteurs propres** de A

$\Leftrightarrow$ **la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n**

(dans ce cas, une base de VP est obtenue en regroupant les bases des sous-espaces propres)

$\Leftrightarrow$ il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que **$A = PDP^{-1}$**

Dans ce cas, P contient en colonnes une base de vecteurs propres, et D les valeurs propres correspondantes.

En particulier :

- _ si A a **n valeurs propres distinctes**, alors A est diagonalisable (et chaque sous-espace propre est de dimension 1)
- _ si A est **symétrique**, alors elle est diagonalisable.

A savoir redémontrer par l'absurde :

si A n'a qu'une **seule valeur propre**, et si A n'est pas diagonale, alors A n'est pas diagonalisable.