Fiche – Les séries

Pour montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge :

- Poser $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ et montrer que S_N est convergente. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N)$

- Pensez aux sommes télescopiques

- Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente

- Reconnaître une série usuelle :

_ Si $-1 < q < 1$ alors : $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$, $\sum_{n \geq 0} n(n-1)q^{n-2}$ convergent (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \quad \text{Astuce : } n^2 = n(n-1) + n$$

_ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge (absolument) et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

_ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (série de Riemann)

- Utiliser la comparaison des termes à termes positifs :

Rappel : si (u_n) est à termes positifs, la somme partielle est croissante

_ Soit (u_n) et (v_n) deux suites à **termes positifs**.

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ ou si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ converge

$\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$ diverge

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$ converge

Remarques :

_ Cas de $\sum_{n \geq 1} q^{n-1}$: pensez au changement d'indice

_ Pour montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on peut trouver un équivalent de u_n ou montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

_ Attention, le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ne peut être utilisé qu'après avoir montré la convergence de la série