Fiche : Les suites

1) Suites usuelles

si $\forall n \in \mathbb{N}$,	la suite (u_n) est :	Dans ce cas :
$u_{n+1} = u_n + r$	arithmétique	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + (n - p)r$
$u_{n+1} = u_n \times q$	géométrique	$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$
$u_{n+1} = au_n + b$	arithmético-géométrique	c tel que $c = ac + b$ est le point fixe. $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a.
$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$	linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants	Equation caractéristique : $x^2 = ax + b$ _ si $\Delta > 0$: 2 sol. x_1 et x_2 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ _ si $\Delta = 0$: 1 sol. $x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$.

2) Etude d'une suite récurrente (= suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$)

_ Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$ (ou $u_n \leq A, A \leq u_n \leq B, \dots$) :

- Etudier le signe de $u_n - A$
- Par récurrence en utilisant le sens de variation de f au besoin (ex : si $u_n \geq A$ et si f croissante alors $f(u_n) \geq f(A)$)

_ Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (ou $u_n \geq u_{n+1}$) :

- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- Par récurrence, en utilisant f au besoin (si $u_n \leq u_{n+1}$ et f croissante $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \dots$)

_ Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq k |u_n - a|$ (ou similaire)

- Utiliser l'inégalité des accroissements finis entre u_n et a pour f .
(il faut : $u_n \in I, a \in I, a$ point fixe de f et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$)

_ Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$ (ou similaire)

- Par récurrence, en utilisant la relation précédente dans l'hérédité.

3) Etude d'une suite implicite

Cadre : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est une fonction continue. Par le théorème de la bijection, on montre que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n . (donc $f_n(u_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

_ Pour montrer une égalité sur u_n : Partir de $f_n(u_n) = 0$.

_ Pour montrer que $u_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$: **Comparer les images** par f_n et utiliser le sens de variation de f_n

_ Pour montrer que $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$: comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$, puis $f_n(u_n)$ et $f_{n+1}(u_n)$ et enfin remarquer que $f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

_ Pas de récurrence pour des suites implicites !

4) Limites :

Pour trouver la limite d'une suite :

- si formule explicite, utiliser $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$, croissances comparées, équivalents, ...
- si inégalité(s), utiliser le théorème des gendarmes ou le théorème de comparaison
- si (u_n) croissante majorée (ou décroissante minorée), elle converge. Si elle ne converge pas, elle tend vers $+\infty$ ($-\infty$). (ou suites adjacentes)
Puis utiliser le **point fixe** pour trouver la valeur si suite récurrente.