1. Densité et fonction de répartition

Fonction de répartition :

Soit X une VAR et F_X sa fonction de répartition. Si :

- _ F_X est continue sur $\mathbb{R}$
 - _ F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
- alors X est une variable à densité et une densité de X est la dérivée de F_X là où elle existe.

Densité de probabilité :

- Si
- _ f est positive sur $\mathbb{R}$
 - _ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
 - _ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

Alors f est une **densité de probabilité**.

Dans ce cas, si X est une VAR de densité f ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (\text{séparer les cas si besoin})$$

On a aussi : $P(X = a) = 0$ $P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$

Si $a < b$, $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt = F_X(b) - F_X(a)$

Remarque : si f est nulle en dehors d'un intervalle I , alors :

- _ X est à valeurs dans I
- _ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{"avant I"} \\ 1 & \text{"après I"} \end{cases}$

Propriété :

Si X est une variable à densité de densité f , alors :

- _ F_X est continue sur $\mathbb{R}$
- _ F_X est de classe C^1 en tout point où f est continue et en ces points $F'_X = f$.

Fonctions d'une VAR : pour chercher la **loi de $Y = g(X)$** , il faut chercher **F_Y**
(attention aux différents cas !)

$$P(X^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(|X| \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(-x \leq X \leq x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(e^X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ P(X \leq \ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si X à valeurs dans $]0; +\infty[$, $P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x)$

...

Maximum, minimum :

Soit X et X' deux variables aléatoires

- _ si $Y = \max(X, X')$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, (Y \leq x) = (X \leq x) \cap (X' \leq x)$
- _ si $Z = \min(X, X')$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, (Z > x) = (X > x) \cap (X' > x)$

2. Espérance et variance

Soit X une V.A.R de densité f .

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt$ converge absolument, X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt$.

Théorème de transfert :

Si g est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sauf en un nombre fini de points.

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ converge absolument,

alors $g(X)$ admet une espérance, et $\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$

(ou sur intervalle I si f nulle en dehors de I)

En particulier :

Pour $n \geq 1$: si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n.f(t)dt$ converge, X^n admet une espérance et $\mathbf{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n.f(t)dt$.

Définition :

Si existence, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

Formule de König-Huygens :

Si $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$ existent, alors $\mathbf{V}(X)$ existe et $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

Remarque : Le cas échéant, pensez à utiliser la parité de f pour $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$

3. Lois usuelles

Loi	$\mathcal{U}[a;b]$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$
Densité : $f(x) =$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$
Espérance	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	0	m
Variance	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	σ^2
Fonction de répartition $F_X(x) =$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	Φ (table) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$	Φ par transformation affine

Remarques :

_ $X \rightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X-m}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

_ Attention à reconnaître la valeur des intégrales correspondantes dans un exercice !

(ex : calcul de $I = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$: c'est $\mathbf{E}(X)$ si $X \rightarrow \mathcal{E}(1)$, donc $I = \frac{1}{1} = 1$)

_ si $X \rightarrow \mathcal{U}[0;1[)$ alors $Y = -\frac{1}{a} \ln(1-X) \rightarrow \mathcal{E}(a)$.