Fiche : Variables aléatoires discrètes

1. Généralités

(X est une V.A.R., avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$)

Loi de X : Ensemble des $P(X = x_i)$, pour $i \in I$ (ou $P(X = k)$, $k \in X(\Omega)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), donné par un tableau si peu de valeurs ou par une formule. (Commencer par trouver $X(\Omega)$, puis exprimer l'événement $(X = x_i)$).

Remarque : $(X = x_i)_{i \in I}$ forment un **SCE** donc $\displaystyle\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$

Fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) \\ &= P(X < k + 1) - P(X < k) \\ &= P(X \geq k) - P(X \geq k + 1) \\ &= P(X > k - 1) - P(X > k) \end{aligned}$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$$

Si X = **maximum** : $(X \leq k)$ = "tous sont $\leq k$"
Si X = **minimum** : $(X \geq k)$ = "tous sont $\geq k$"
Si X= **rang 1^er^ succès**, $(X > k)$ = "les k premiers essais sont des échecs"

Espérance : Si la somme est finie ou la série absolument convergente, X admet une espérance, et

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i \times P(X = x_i)$$

Théorème de transfert : Si la somme est finie ou la série est absolument convergente,

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) \times P(X = x_i)$$

Variance / Ecart-type : Si existence, $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Formule de Huygens : Si existence, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Transformation affine : Si existence, $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad V(aX + b) = a^2V(X)$.

2. Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Certaine **$\mathcal{C}$(a)**	une seule valeur prise	$\{a\}$	$P(X = a) = 1$	a	0
Uniforme **$\mathcal{U}$([[1n]])**	Equiprobabilité	$\{1, \ldots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli **$\mathcal{B}$(p)**	succès de proba p X = 1 si succès X = 0 sinon	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale **$\mathcal{B}$(n,p)**	n épreuves indépendantes X = nbre de succès	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson **$\mathcal{P}(\lambda)$**		$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Géométrique **$\mathcal{G}$(p)**	épreuves indépendantes X = premier succès	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Si $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P(X > k) = (1 - p)^k}$ ("les k premiers essais sont des échecs")