Révisions analyse - Correction

Exercice 1

Partie I

1) f est continue sur $]0; +\infty[$ comme différence et produit de fonctions continues.

$\lim\limits_{x \to 0} x^2\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

2) $\forall\, x > 0$, $f(x) = x^2\left(\ln(x) - \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2\ln(x) - \dfrac{x^2}{2} - 0}{x} = x\ln(x) - \dfrac{x}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. (par croissances comparées).

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(C_f) admet une demi-tangente horizontale en 0.

4) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = 2x\ln(x) + \dfrac{x^2}{x} - x = 2x\ln(x)$ du signe de $\ln(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = -1/2$

5) f ' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f''(x) = 2\ln(x) + 2 = 2(\ln(x) + 1)$

$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		concave		convexe	

Un point d'inflexion : $(1/e, f(1/e))$ avec $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e^2}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) - \dfrac{1}{2e^2} = -\dfrac{1}{e^2} - \dfrac{1}{2e^2} = -\dfrac{3}{2e^2}$

Pente de la tangente : $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{2}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{2}{e}$ ($\approx -0{,}74$)

6) $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\ln(x) - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + \dfrac{1}{2} = 0$ (car $x \neq 0$) $\Leftrightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$

Deux points d'intersection : $(0, 0)$ et $(\sqrt{e}, 0)$

$f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) = \sqrt{e}$

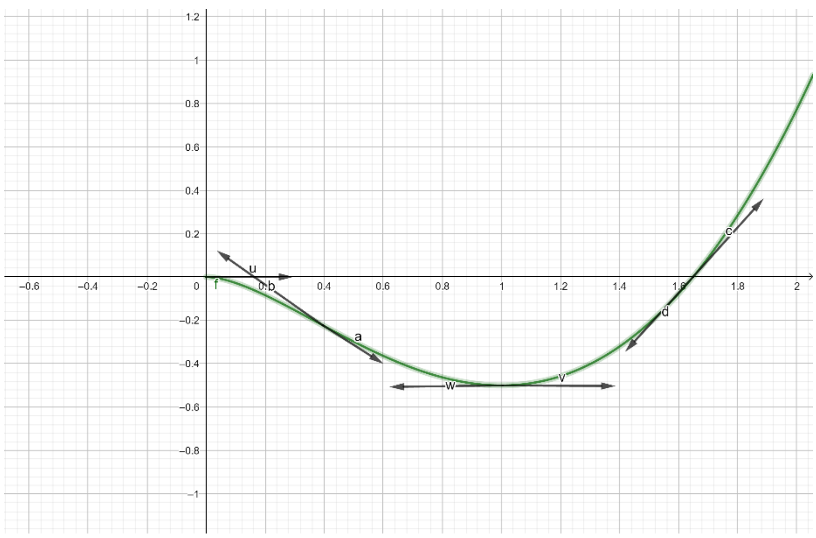
Points particuliers :

$(0, 0)$ avec $f'(0) = 0$

$\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{3}{2e^2}\right)$ (point d'inflexion) avec $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{2}{e}$

$\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ (minimum) avec $f'(1) = 0$

$(\sqrt{e}, 0)$ avec $f'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}$



Partie B

1. Sur]0; 1], f est majorée par 0, donc l'équation f(x) = n'admet pas de solution.
Sur [1; + ∞[, f est continue et strictement croissante. De plus $n \in [-1/2; +\infty[$. Donc l'équation f(x) = n admet une unique solution sur [1; + ∞[, appelée u_n.

2. a) $f(u_n) = n \quad f(n^{1/3}) \le (n^{1/3})^3 \;(= n)$ donc $f(n^{1/3}) \le f(u_n)$
f est strictement croissante sur [1; + ∞[, donc $n^{1/3} \le u_n$.

b) $\lim_{n \to +\infty} n^{1/3} = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c) $\forall n \ge 1,\ n.n^{1/3} \le n.u_n \quad n^{4/3} \le n.u_n \quad \frac{1}{n.u_n} \le \frac{1}{n^{4/3}}$

Les séries sont à termes positifs et $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^{4/3}}$ converge (4/3 > 1). Donc la série $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n.u_n}$ converge aussi.

Exercice 2

1. si $x \ge 0$: les bornes sont dans le bon sens et $\forall t \in [0;x]$, $\exp(-t^2/2) \ge 0$ donc $\int_0^x \exp(-t^2/2)dt \ge 0 \quad f(x) \ge 0$.
si $x \le 0$: la fonction intégrée est positive et les bornes dans le mauvais sens. Donc : $\forall x \le 0$, $f(x) \le 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \int_0^{-x} \exp(-t^2/2)dt$

On pose $u = -t \Leftrightarrow t = -u$ donc $\frac{dt}{du} = -1 \quad dt = -du$

$t = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad t = -x \Leftrightarrow u = x$

Donc $f(-x) = \int_0^x \exp(-(-u)^2/2)(-du) = -\int_0^x \exp(-u^2/2)du = -f(x)$ donc f est impaire.

3. Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(t) = \exp(-t^2/2)$.
g est continue sur ℝ, donc f est de classe C^1 sur ℝ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x) = \exp(-x^2/2)$.

4. On sait que la fonction $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2/2)$ est une densité de la loi N(0;1). Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ converge et vaut 1. Par parité de la fonction h, $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)dt = \frac{1}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \exp(-t^2/2)dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Par définition de l'intégrale impropre, cela signifie que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \exp(-t^2/2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. Comme f est impaire, on a aussi : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	+		+
f (x)	$-\sqrt{\pi/2}$ ↗	0	↗ $\sqrt{\pi/2}$