Révisions Analyse - Exercices

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) - \dfrac{x^2}{2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

On note (C_f) la courbe de f.

Partie I

1) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3) (C_f) admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?
4) Etudier les variations de f.
5) Etudier la convexité de f. Préciser les points d'inflexion éventuels avec leur tangente.
6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) et de l'axe des abscisses (préciser la tangente).
7) Tracer (C_f) dans un repère bien adapté.
(On donne : $\sqrt{e} \approx 1,65$, $1/e \approx 0,37$, $-3/(2e^2) \approx -0,20$)

Partie II

1) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel $u_n \geq 0$ tel que $f(u_n) = n$.
2) On admet que $\forall\, x \geq 0,\ f(x) \leq x^3$.
a) Montrer que $\forall\, n \geq 1,\ u_n \geq n^{1/3}$
b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
c) Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n.u_n}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x \exp(-t^2/2)dt$

1) Etudier le signe de f.
2) Etudier la parité de f.
3) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.
4) A l'aide des résultats sur la loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
5) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.