Révisions niveau 2 - Correction

1. Loi normale et méthode d'inversion

1. $X \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc X admet pour densité la fonction $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x2/2}$.

f_X est continue sur $\mathbb{R}$, donc $F_X = \Phi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Donc Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x2/2} > 0$

Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme Φ est une fonction de répartition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$.

Donc Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = P(V \leq x) = P(\Phi^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq \Phi(x))$ (car Φ est strictement croissante)

$= F_U(\Phi(x))$

Or $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ donc $F_U(\Phi(x)) = \Phi(x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = F_X(x)$. Donc V suit la même loi que X.

3. a) $0 < \alpha_0 \leq 1$ donc $0 < \frac{\alpha_0}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $-\frac{1}{2} \leq -\frac{\alpha_0}{2} \leq 0$ $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\alpha_0}{2} < 1$.

On a vu que Φ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$ et $1 - \frac{\alpha_0}{2} \in [1/2, 1[$ donc l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha_0}{2}$ admet une unique solution x_0 sur $[0; +\infty[$.

b) $P\left(|X| \geq t_0\right) = 1 - P(X \leq t_0) = 1 - P(-t_0 \leq X \leq t_0) = 1 - (\Phi(t_0) - \Phi(-t_0)) = 1 - (2\Phi(t_0) - 1) = 2 - 2\Phi(t_0)$

$= 2 - 2\left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) = \alpha_0$.

2. Fonction indicatrice et espérance conditionnelle

1. 1_A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(1_A = 1) = P(A)$. Donc $E(1_A) = P(A)$.

$V(1_A) = P(A)(1 - P(A))$.

2. a) $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 1$, $1 \times 0 = 0$, $1 \times 1 = 1$ $\quad 1_A 1_B(\Omega) = \{0, 1\}$

Soit $\omega \in \Omega$ $\quad 1_A(\omega)1_B(\omega) = 1 \Leftrightarrow 1_A(\omega) = 1$ et $1_B(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B \Leftrightarrow \omega \in A \cap B$

$\Leftrightarrow 1_{A \cap B}(\omega) = 1$ $\quad$ donc $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$

b) Si $\omega \in A$, $1_A(\omega) = 1$ $\quad 1_{\overline{A}}(\omega) = 0$ $\quad$ si $\omega \in \overline{A}$ $\quad 1_A(\omega) = 0$ $\quad 1_{\overline{A}}(\omega) = 1$.

Dans les deux cas, $1_{\overline{A}}(\omega) = 1 - 1_A(\omega)$ donc $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$.

$1_A(\omega)1_A(\omega) = 1 \begin{cases} \text{si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$ donc $1_A 1_A = 1_A$ $\quad$ On voit également que $1_A 1_{\overline{A}} = 0$

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ donc $1_{A \cup B} = 1 - 1_{\overline{A \cup B}} = 1 - 1_{\overline{A} \cap \overline{B}} = 1 - 1_{\overline{A}} 1_{\overline{B}}$

$= 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B) = 1 - (1 - 1_A - 1_B + 1_A 1_B) = 1_A + 1_B - 1_A 1_B = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$.

3. i) Si $\omega \in A$: $\left(E_A(X)\right)(\omega) = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A(\omega) + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})1_{\overline{A}}(\omega) = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)$

Si $\omega \in \overline{A}$: $\left(E_A(X)\right)(\omega) = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A(\omega) + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})1_{\overline{A}}(\omega) = \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})$.

ii) Par linéarité : $E(E_A(X)) = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)E(1_A) + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})E(1_{\overline{A}})$

$= \frac{1}{P(A)} E(X1_A)P(A) + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})P(\overline{A}) = E(X1_A) + E(X1_{\overline{A}}) = E(X(1_A + 1_{\overline{A}})) = E(X).$

Ou en utilisant le i) :

Valeurs prises	$\frac{1}{P(A)} E(X1_A)$	$\frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})$
Probabilités	$P(A)$	$P(\overline{A})$

Donc $E(E_A(X)) = \frac{1}{P(A)} E(X1_A) \times P(A) + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}}) \times P(\overline{A}) = E(X1_A) + E(X1_{\overline{A}})$

$= E(X(1_A + 1_{\overline{A}})) = E(X).$

iii) $E_A(X1_A)$

$= \frac{1}{P(A)} E(X1_A1_A)1_A + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_A1_{\overline{A}})1_{\overline{A}} = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A + \frac{1}{P(\overline{A})} E(0)1_{\overline{A}} = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A$

Et $E_A(X)1_A = \left(\frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})1_{\overline{A}}\right)$

$= \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A1_A + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})1_{\overline{A}}1_A$

$= \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X1_{\overline{A}})0 = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)1_A$ donc $E_A(X1_A) = E_A(X)1_A$

3. Somme de VAR à densité

1) a) X et Y sont à valeurs dans $[0; +\infty[$ donc $Z = X + Y$ aussi. Donc f_Z est nulle sur $]-\infty;0[$.

b) Rappel : $f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ ae^{-ax} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)f_Y(x-t)dt + \int_0^x f_X(t)f_Y(x-t)dt + \int_x^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$

si $t \leq 0$ $f_X(t) = 0$ donc $f_X(t)f_Y(x-t) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} f_X(t)f_Y(x-t)dt = 0$

si $t \geq x$ $x - t \leq 0$ donc $f_Y(x-t) = 0$ donc $\int_x^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt = 0$.

Donc $f_Z(x) = \int_0^x f_X(t)f_Y(x-t)dt$

si $0 \leq t \leq x$, $t \geq 0$ et $x - t \geq 0$ donc $f_Z(x) = \int_0^x ae^{-at}a^{-a(x-t)}dt = \int_0^x a^2e^{-ax}dt = a^2e^{-ax}(x-0) = xa^2e^{-ax}$.

Donc $f_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ xa^2e^{-ax} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

2) a) Rappel : $f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

Le produit $f_X(t)f_Y(x-t)$ est non nul quand $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq x - t \leq 1$ ($\Leftrightarrow -1 \leq t - x \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 \leq t \leq x$

b) X et Y sont à valeurs dans [0;1], donc $Z = X + Y$ est à valeurs dans [0;2].

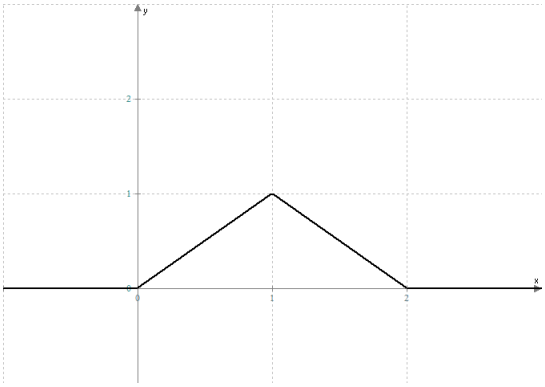
Donc $f_Z(x) = 0$ si $x < 0$ ou $x > 2$.

_ si $0 \leq x \leq 1$ $x - 1 \leq 0$ et $x \leq 1$ donc le produit est non nul quand $0 \leq t \leq x$.

$f_Z(x) = \int_0^x f_X(t)f_Y(x-t)dt = \int_0^x 1.1dt = x$

_ si $1 \leq x \leq 2$ $x - 1 \geq 0$ et $x \geq 1$ donc le produit est non nul quand $x - 1 \leq t \leq 1$.

$f_Z(x) = \int_{x-1}^{1} f_X(t) f_Y(x - t)dt = \int_{x-1}^{1} 1.1dt = 1.(1 - (x - 1)) = 2 - x.$

Conclusion :

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } x > 2 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$