

1. Loi normale et méthode d'inversion

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle qu'on note Φ la fonction de répartition de X .

- 1) Montrer que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
- 2) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0;1[$. On pose $V = \Phi^{-1}(U)$. Montrer que V suit la même loi que X .
- 3) a) Soit $\alpha_0 \in]0;1]$. Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [0; +\infty[$ tel que $\Phi(t_0) = 1 - \frac{\alpha_0}{2}$.
- b) Montrer que $P(|X| \geq t_0) = \alpha_0$.

2. Fonction indicatrice d'un événement et espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Soit A un événement. On note 1_A la variable aléatoire définie par : $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$.

1. Montrer que 1_A admet une espérance et que $E(1_A) = P(A)$. Que vaut $V(1_A)$?

2. Soit A et B deux événements.

a) Soit $x \in \Omega$. Compléter le tableau suivant :

	$1_A(x)$	$1_B(x)$	$1_{A \cap B}(x)$	$1_A(x) \times 1_B(x)$
$x \in A \cap B$				
$x \in A \cap \overline{B}$				
$x \in \overline{A} \cap B$				
$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$				

Que peut-on en déduire ?

b) Exprimer $1_{\overline{A}}$ en fonction de 1_A . Simplifier $1_A \times 1_A$ et $1_{\overline{A}} \times 1_A$.

c) En déduire que $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$.

(Remarque : On peut aussi montrer que $\min(1_A, 1_B) = 1_{A \cap B}$ et $\max(1_A, 1_B) = 1_{A \cup B}$.)

3. Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$.

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs.

On définit la variable aléatoire $E_A(X)$ par :

$$E_A(X) = \frac{1}{P(A)} E(X 1_A) 1_A + \frac{1}{P(\overline{A})} E(X 1_{\overline{A}}) 1_{\overline{A}}$$

i) Soit $\omega \in \Omega$. Que vaut $(E_A(X))(\omega)$ si $\omega \in A$? si $\omega \in \overline{A}$?

ii) Montrer que $E(E_A(X)) = E(X)$.

iii) Montrer que $E_A(X 1_A) = E_A(X) 1_A$.

3. Somme de VAR à densité

Rappel : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\text{Alors } \forall k \in \mathbb{N}, P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i).$$

On admet le résultat suivant :

Soit X et Y deux variables indépendantes de densité respectives f_X et f_Y .

Alors $Z = X + Y$ est une variable à densité, de densité la fonction f_Z définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x - t)dt.$$

(on dit que f_Z est le produit de convolution de f_X et f_Y)

1) Soit $a > 0$. Soit X et Y deux V.A.R. indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(a)$.

On pose $Z = X + Y$.

a) Que vaut $f_Z(x)$ pour $x < 0$?

b) Soit $x \geq 0$. Montrer que $f_Z(x) = \int_0^x f_X(t)f_Y(x - t)dt$.

En déduire l'expression de $f_Z(x)$ en fonction de x .

3) Soit X et Y deux V.A.R. indépendantes qui suivent la loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$.

Soit $Z = X + Y$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $f_X(t)f_Y(x - t)$ est non nul si seulement si
$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ \text{et} \\ x - 1 \leq t \leq x \end{cases}$$

b) Déterminer une densité de Z .

On pourra étudier séparément les cas $x < 0$, $0 \leq x \leq 1$, $1 < x \leq 2$, $x > 2$.

b) Tracer sa courbe représentative.