

Exercice 1

1) $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$

2) $(X = 2) = \text{"Après deux lancers, on trouve deux résultats différents"}$

$$P(X = 2) = \frac{6 \times 5}{6 \times 6} = \frac{5}{6}$$

$(X = 3) = \text{"les deux premiers résultats sont les mêmes, le troisième est différent"}$

$$P(X = 3) = \frac{6 \times 1 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{36}$$

3) $\forall k \geq 2, (X = k) = \text{"les } k - 1 \text{ premiers sont identiques, le } k\text{-ème est différent"}$

$$P(X = k) = \frac{6 \times 1 \times \dots \times 1 \times 5}{6^k} = \frac{5}{6^{k-1}}.$$

$$4) \sum_{k \geq 2} kP(X = k) = \sum_{k \geq 2} k \frac{5}{6^{k-1}} = 5 \sum_{k \geq 2} k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = 5 \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} - 5 \times 1$$

$-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc la série converge absolument. Donc X admet une espérance et

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2} - 5 = 5 \times \frac{36}{25} - 5 = \frac{36}{5} - \frac{25}{5} = \frac{11}{5}.$$

$$5) \sum_{k \geq 2} k^2 P(X = k) = \sum_{k \geq 2} (k(k-1) + k) \frac{5}{6^{k-1}} = 5 \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \sum_{k \geq 2} k \frac{5}{6^{k-1}}$$

(la deuxième série converge et la somme vaut $11/5$).

$$= \frac{5}{6} \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} + \dots$$

$-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc les séries convergent absolument. Donc X^2 admet une espérance et

$$E(X^2) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^3} + \frac{11}{5} = \frac{5}{6} \times 2 \times \frac{6^3}{5^3} + \frac{11}{5} = \frac{72}{25} + \frac{55}{25} = \frac{127}{25}$$

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{127}{25} - \frac{121}{25} = \frac{6}{25}.$

6) a) $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$, donc $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$$\forall k \geq 1, P(Y = k) = P(X - 1 = k) = P(X = k + 1) = \frac{5}{6^k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{5}{6} = \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{5}{6}$$

$$\text{Donc } Y \longrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{5}{6}\right), \text{ donc } E(Y) = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5} \text{ et } V(Y) = \frac{1 - \frac{5}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \times \frac{6^2}{5^2} = \frac{6}{25}$$

Comme $X = Y + 1$, $E(X) = E(Y) + 1 = \frac{11}{5}$ $V(X) = 1^2 V(Y) = \frac{6}{25}.$

Exercice 2

1°) A chaque question, la probabilité de choisir la bonne réponse est $1/4$.

Il y a N questions indépendantes. X_1 compte le nombre de bonnes réponses. Donc $X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(N, 1/4)$.

$$\text{Donc } \forall i \in \{0, \dots, N\}, P(X_1 = i) = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{N-i} = \binom{N}{i} \frac{3^{N-i}}{4^N}$$

2°) a) $P(X_1 = N) \neq 0$ $P(X_2 = N) \neq 0$ (le joueur peut gagner à toutes les questions à la première étape, idem à la deuxième), mais $P((X_1 = N) \cap (X_2 = N)) = 0$. Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

b) Si $(X_1 = i)$: le candidat a répondu juste à i questions, donc on lui repose $N - i$ questions.

A chaque fois, la probabilité de donner la bonne réponse est $1/3$.

Donc $X_{2(X_1=i)} \longrightarrow \mathcal{B}(N-i, 1/3)$.

$$\text{c) Donc si } j \leq N-i, P_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \binom{N-i}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^{N-i-j} = \binom{N-i}{j} \frac{2^{N-i-j}}{3^{N-i}}$$

d) si $j > N-i$: l'événement est impossible (il n'y a que $N-i$ questions posées) donc $P_{(X_1=i)}(X_2 = j) = 0$.

3 a) Si $0 \leq j \leq N-i$

$$\binom{N-i}{j} \binom{N}{i} = \frac{(N-i)!}{j!(N-i-j)!} \times \frac{N!}{i!(N-i)!} = \frac{N!}{i!j!(N-i-j)!}$$

$$\binom{N}{j} \binom{N-j}{i} = \frac{N!}{j!(N-j)!} \times \frac{(N-j)!}{i!(N-j-i)!} = \frac{N!}{i!j!(N-i-j)!} \quad \text{donc } \binom{N-i}{j} \binom{N}{i} = \binom{N}{j} \binom{N-j}{i}.$$

$$\text{b) } j \leq N-i \Leftrightarrow i \leq N-j \quad \text{donc } P_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \begin{cases} \binom{N-i}{j} \frac{(k-2)^{N-i-j}}{(k-1)^{N-i}} & \text{si } i \leq N-j \\ 0 & \text{si } i > N-j \end{cases}$$

$$X_2(\Omega) = \{0, \dots, N\}$$

La famille $(X_1 = i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\forall j \in \{0, \dots, N\}, P(X_2 = j) = \sum_{i=0}^N P(X_1 = i) P_{(X_1=i)}(X_2 = j)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-j} P(X_1 = i) P_{(X_1=i)}(X_2 = j) + \sum_{i=N-j+1}^N P(X_1 = i) P_{(X_1=i)}(X_2 = j)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N}{i} \frac{3^{N-i}}{4^N} \binom{N-i}{j} \frac{2^{N-i-j}}{3^{N-i}} + 0 = \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N}{j} \binom{N-j}{i} \frac{2^{N-i-j}}{4^N}$$

$$= \frac{1}{4^N} \binom{N}{j} \sum_{i=0}^{N-j} \binom{N-j}{i} 2^{N-j-i} 1^i$$

$$= \frac{1}{4^N} \binom{N}{j} (2+1)^{N-j} \quad (\text{binôme de Newton})$$

$$= \frac{1}{4^N} \binom{N}{j} 3^{N-j} = \binom{N}{j} \left(\frac{3}{4}\right)^{N-j} \left(\frac{1}{4}\right)^j \quad \text{Donc } X_2 \longrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{4}\right) \quad (X_2 \text{ suit la même loi que } X_1 !)$$

$$4) X = X_1 + \frac{1}{2} X_2 \quad \text{donc d'après la linéarité de l'espérance, } E(X) = E(X_1) + \frac{1}{2} E(X_2) = \frac{N}{4} + \frac{1}{2} \frac{N}{4} = \frac{3N}{8}.$$

Exercice 3

$$P(Y = X) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) P(Y = i) \quad (\text{par indépendance})$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} p p^{i-1} q = \sum_{i=1}^{+\infty} (pq)^{i-1} pq = pq \sum_{j=0}^{+\infty} (pq)^j \quad (\text{avec } j = i-1)$$

$$= pq \frac{1}{1-pq} = \frac{pq}{1-pq}$$