Révisions probabilités discrètes – Exercices

Exercice 1

On considère un dé équilibré. On lance le dé une première fois, puis on le relance jusqu'à obtenir un résultat différent du premier. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires en tout.

1) Déterminer $X(\Omega)$.

2) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

3) Déterminer $P(X= k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

4) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{11}{5}$.

5) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \frac{6}{25}$.

6) On pose $Y = X – 1$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Retrouver ainsi l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soit $N \geq 1$. Dans un jeu radiophonique, on pose N questions à un candidat. Pour chaque question, il a le choix entre 4 réponses et il répond au hasard. Pour chaque bonne réponse, on lui attribue un point.

1°) Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus. Déterminer la loi de X_1.

2) A la fin des N questions, on repose au candidat les questions pour lesquelles il a donné une mauvaise réponse : il répond de nouveau au hasard parmi les 3 autres réponses et on lui attribue 1/2 point par réponse correcte. Soit X_2 la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses données lors de ce second choix.

a) X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b) Soit $i \in \{0,\dots,N\}$. Montrer que la loi de X_2 conditionnée à $(X_1 = i)$ est une loi usuelle.

c) En déduire que $\forall\, j \leq N – i$, $P_{(X_1 = i)}(X_2= j) = \binom{N-i}{j}\frac{2^{N-i-j}}{3^{N-i}}$.

d) Que vaut $P_{(X_1 = i)}(X_2= j)$ si $j > N – i$?

3°) a) Montrer que si $0 \leq j \leq N – i$, $\binom{N-i}{j}\binom{N}{i} = \binom{N}{j}\binom{N-j}{i}$.

b) Montrer que pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, $P(X_2 = j) = \frac{1}{4^N}\binom{N}{j}\sum_{i=0}^{N-j}\binom{N-j}{i}2^{N-j-i}\,1^i$

c) En déduire la loi de X_2 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

4°) Soit X le nombre total de points obtenus par le candidat. Déterminer E(X).

Exercice 3

Soit $p \in \,]0;1[$. On pose $q = 1 – p$. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent respectivement la loi $\mathcal{G}(p)$ et la loi $\mathcal{G}(q)$.

Montrer que $P(Y = X) = \frac{pq}{1 - pq}$.