

**Exercice 1**

On considère un dé équilibré à 6 faces.

On lance ce dé jusqu'à obtenir un '6'. On désigne par X le nombre de lancers nécessaires et on désigne par Y le nombre de '1' obtenus avant le premier '6'.

1°) Quelle est la loi de X ?

2°) X et Y sont-elles indépendantes ?

3°) Soit  $i \geq 1$ . Montrer que Y conditionnée par l'événement  $(X = i)$  suit une loi usuelle, dont on précisera les paramètres. En déduire  $P_{(X=i)}(Y = j)$  pour  $j \geq 0$  (on distinguera deux cas).

4°) On admet pour tout entier naturel k fixé pour tout réel  $x \in ]-1;1[$ , la série de terme général  $\binom{n}{k}x^{n-k}$

converge et que  $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ .

a) Montrer que  $\forall j \in \mathbb{N}, P(Y = j) = \sum_{i=j+1}^{+\infty} \binom{i-1}{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5}\right)^j \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1-j}$

b) En déduire que  $\forall j \in \mathbb{N}, P(Y = j) = \frac{1}{6^{j+1}} \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-j}$

c) Déterminer la loi de Y.

d) Soit  $Z = Y + 1$ . Reconnaitre la loi de Z et en déduire l'espérance et la variance de Y.

5°) Selon vous, l'espérance de X.Y est-elle plus grande ou plus petite que  $E(X)E(Y)$  ?

**Exercice 2**

On lance 10 fois un dé équilibré.

On note X le nombre de 1 obtenus et Y le nombre de 2 obtenus.

1) Déterminer la loi de X, de Y.

2) X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Sans calcul, déterminer le signe de  $\rho(X, Y)$ .

4) a) Déterminer la loi de  $X + Y$ .

b) En déduire la valeur de  $\text{cov}(X, Y)$  et  $\rho(X, Y)$ .

c) Déterminer  $E(XY)$ .

**Exercice 3 (En plus)**

Soit  $\lambda > 0$  et  $p \in ]0;1[$ . On pose  $q = 1 - p$ . On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent respectivement la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  et la loi  $\mathcal{G}(p)$ . On note  $F_X$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition de X et de Y.

1) Déterminer  $F_Y(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2) Déterminer  $P(Y = X)$ .

3) On pose  $Z = Y - X$ .

a) Déterminer  $E(Z)$  et  $V(Z)$ .

b) Combien vaut  $P(Z = 0)$  ? Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $P(Z = n)$ .

c) En déduire  $P(Z \geq 0)$ .