Soutien ECG2 – Vendredi 29 Novembre 2024
Applications linéaires - Dichotomie

Exercice 1
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f_n(x) = x^n - n.x + 1$$
On admet que f_n est strictement décroissante sur [0 ;1] et qu'il existe un unique réel a_n vérifiant :
$$0 < a_n < 1 \text{ et } f_n(a_n) = 0.$$
En Python, écrire une fonction `suitea` qui à un entier n associe une valeur approchée de a_n à 10^{-4} près, par la méthode de dichotomie.

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé.
On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1) Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur de A.
2) a) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I_2.
b) f est-elle un automorphisme ?
3) On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
b) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.
c) Quelle est la relation entre A et T ?
4) a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $T^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n. On précisera tous les coefficients.
5) Soit φ l'application qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\varphi(M) = TM - 2M$.
a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer une base de Ker(φ). Quelle est la dimension de Im(φ) ?
c) Déterminer la matrice C de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
d) Montrer que $\forall\, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi^2(M) = 0$.

Exercice 3 (Oral HEC)
Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
1) v peut-il être bijectif ? Déterminer Im(v).
2) Déterminer Ker(u).
3) Donner la forme des matrices A et B.