Soutien Algèbre
Vendredi 22 Novembre 2024

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé.

1) La matrice A est-elle inversible ?

2) Déterminer une base de Ker(f). f est-elle surjective ?

3) a) Soit $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminer à quelle condition sur ses coefficients, $Y \in \mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer une base de Im(f) de deux manières différentes.

4) On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) Détermine la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

5) Soit $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ TM + MT = 0_3\}$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la forme générale des matrices de $\mathcal{E}$, puis en déduire une base de $\mathcal{E}$.

6) Soit $g : \begin{cases} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto TM + MT \end{cases}$.

a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Donner la dimension de Ker(g), puis de Im(g).

Exercice 2 (Un peu plus difficile)

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit f_1, f_2, f_3 les trois fonctions de $\mathcal{E}$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^{-2x}$.

1) Montrer que (f_1, f_2, f_3) forment une famille libre de $\mathcal{E}$.

Remarque : Si une fonction est nulle, alors elle est nulle en tout point, sa dérivée est nulle, ses limites sont nulles, …

2) Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et d l'application qui à toute fonction de $\mathcal{F}$, associe sa dérivée.
Montrer que d est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

3) On note $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{E} \ / \ f' + 2f = 0\}$.

a) soit $f \in \mathcal{G}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)e^{2x}$.
Montrer que g est constante.

b) En déduire que $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}(f_3)$