Soutien - Convergence - Correction

Exercice 1

1) S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$.

Donc $S_n \longrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Donc $E(S_n) = np \quad V(S_n) = np(1-p) = n.\sigma^2$

2) $Z_n = \frac{1}{n} S_n$ donc $E(Z_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = p \qquad V(Z_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Z_n admet une espérance et une variance, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ P\left(\left|Z_n - E(Z_n)\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \qquad P\left(\left|Z_n - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

$P(-\varepsilon \leq Z_n - p \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad P(p - \varepsilon \leq Z_n \leq p + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Avec $\varepsilon = 2\sigma$, on obtient : $P(p - 2\sigma \leq Z_n \leq p + 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n(2\sigma)^2} \quad P(p - 2\sigma \leq Z_n \leq p + 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4n}$.

Exercice 2

1) a) $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$ _ si $x < 0$ pas de solutions $F_Y(x) = 0$

_ si $x \geq 0$ $F_Y(x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$

Donc $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

b) F_Y est continue et de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ (fonction constante) et sur $]0;+\infty[$ (car Φ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont de classe C^1 sur $]0;+\infty[$).

En 0 : $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = 2\,\Phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ donc F_Y est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Donc Y est une VAR à densité

Dérivée de $2\Phi(\sqrt{x}) - 1$ sur $]0;+\infty[$ (dérivée d'une composée) :

$2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$ *(attention : non défini en 0 !)*

Donc une densité de Y est : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

2) a) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P\left(\frac{Y}{n} \leq x\right) = P(Y \leq nx) = F_Y(nx)$

$nx \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ donc si $x \geq 0$ $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 2\Phi\left(\sqrt{nx}\right) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

b) si $x < 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

si $x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{nx} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \Phi(X) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = 2 \times 1 - 1 = 1$

Soit Z la variable aléatoire certaine égale à 0. Alors $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ (continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0).

Donc pour tout réel x non nul, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$. Donc (Z_n) converge en loi vers $Z \longrightarrow C(0)$.

c) De la même manière, $\forall\ x \in \mathbb{R},\ F_{Z'_n}(x) = F_Y\left(\frac{x}{n}\right)$ $\quad \frac{x}{n}$ est du même signe de x donc :

$F_{Z'_n}(x) = \begin{cases} 2\,\Phi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Donc $\forall x < 0$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z'_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

Par contre, $\forall x \geq 0$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{n}} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} F_{Z'_n}(x) = 2\Phi(0) - 1 = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} F_{Z'_n}(x) = 0$.

Si (Z'_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = 0$.

Impossible car $\lim_{x \to +\infty} F_Y(x) = 1$. Donc (Z'_n) ne converge pas en loi.

Exercice 3

1.a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P((X_1 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x))$

$= P(X_1 \leq x) \times \ldots \times P(X_n \leq x)$ (par indépendance)

$= P(X_1 \leq x)^n$ (même loi) $= F_{X_1}(x)^n$ Donc $F_{M_n}(x) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})^n \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = P(2M_n - \ln(n) \leq x) = P(2M_n \leq x + \ln(n)) = P\left(M_n \leq \frac{x + \ln(n)}{2}\right) = F_{M_n}\left(\frac{x + \ln(n)}{2}\right)$

$\frac{x + \ln(n)}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x + \ln(n) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\ln(n)$

_ si $x \geq -\ln(n)$ $\frac{x + \ln(n)}{2} \geq 0$ donc $F_{Y_n}(x) = F_{M_n}\left(\frac{x + \ln(n)}{2}\right) = \left(1 - \exp\left(-2\,\frac{x + \ln(n)}{2}\right)\right)^n$

$= (1 - e^{-x - \ln(n)})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{e^{\ln(n)}}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$

_ si $x < -\ln(n)$ $\frac{x + \ln(n)}{2} < 0$ donc $F_{Y_n}(x) = F_{M_n}\left(\frac{x + \ln(n)}{2}\right) = 0$

Donc $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \text{ si } x \geq -\ln(n) \\ 0 \text{ si } x < -\ln(n) \end{cases}$ $x \geq -\ln(n) \Leftrightarrow -x \leq \ln(n) \Leftrightarrow e^{-x} \leq n \Leftrightarrow n \geq e^{-x}$

Dès que $n \geq e^{-x}$ $F_{Y_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \times \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$

$\lim_{n \to +\infty} -\frac{e^{-x}}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} -\frac{e^{-x}}{n}$ $n \times \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \sim_{+\infty} -e^{-x}$

Donc $\lim_{n \to +\infty} n \times \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$ donc $\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = \exp(-e^{-x}) = F_Y(x)$. Donc (Y_n) converge en loi vers Y.

2. a) Z_n est une somme de variables aléatoires indépendantes qui admettent une même espérance et une même variance, donc, d'après la loi faible des grands nombres, $\frac{Z_n}{n}$ est proche de cette espérance pour n très grand. Donc $\frac{Z_{1000}}{1000}$ est proche de $\frac{1}{2}$. Donc Z_{1000} est proche de 500.

b) Z_n est une somme de n VAR indépendantes, de même loi, qui admettent une espérance et une variance. Donc d'après le théorème de la limite centrée, $Z_n^* = \frac{Z_n - E(Z_n)}{\sigma(Z_n)}$ converge en loi vers une variable Z qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Par linéarité, $E(Z_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = n/2$.

Par indépendance, $V(Z_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = \frac{n}{4}$ donc $\sigma(Z_n) = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Donc $Z_n^* = \frac{2}{\sqrt{n}}\left(Z_n - \frac{n}{2}\right)$. Donc $P\left(Z_n \geq \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = P\left(Z_n - \frac{n}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = P(Z_n^* \geq 1)$

Donc $\lim_{n \to +\infty}\left(Z_n \geq \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \lim_{n \to +\infty} P(Z_n^* \geq 1) = P(Y \geq 1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0{,}8413 \approx 0{,}1587$