Soutien Vendredi 21 Mars 2025
Convergences - Exercices

Exercice 1

Soit $p \in]0\,;1[$. On considère n variables indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ qui suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$.

On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$. On pose également $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$.

1) Rappeler la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2) Montrer que $P\big(p - 2\sigma \leq Z_n \leq p + 2\sigma\big) \geq 1 - \dfrac{1}{4n}$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note $Y = X^2$.
1) a) Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
b) Montrer que Y est une VAR à densité, et déterminer une densité de Y.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \dfrac{Y}{n}$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n.
b) Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.
c) Question en plus : Qu'en est-il pour la suite $Z_n' = n.Y$?

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P), indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \exp(-\exp(-x))$ est la fonction de répartition d'une variable Y.
1. a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = 2.M_n - \ln(n)$. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$.
a) A quelle valeur environ peut-on s'attendre pour Z_{1000} ?
b) On admet que $\Phi(1) \approx 0{,}8413$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(Z_n \geq \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)$.