

Exercice 1

1°) X est le rang du premier Six et les lancers sont indépendants, donc $X \rightarrow \mathcal{G}(1/6)$.

2°) $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont de probabilités non nulles.

Or $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3°) Si $(X = i)$: A chacun des $(i - 1)$ premiers lancers, on a obtenu un chiffre entre 1 et 5, puis on a obtenu Six au i -ème tirage.

A chacun des $(i - 1)$ premiers lancers, la probabilité de faire '1' est $1/5$. Les lancers sont indépendants et Y est le nombre de '1' obtenus.

Donc $Y_{(X=i)} \rightarrow B(i - 1, 1/5)$.

$$P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \binom{i-1}{j} \left(\frac{1}{5}\right)^j \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1-j} & \text{si } j \leq i - 1 \Leftrightarrow i \geq j + 1 \\ 0 & \text{si } j > i - 1 \Leftrightarrow i < j + 1 \end{cases}$$

4°) a) La famille $(X = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités

$$\text{totales, } \forall j \in \mathbb{N}, P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) P_{(X=i)}(Y = j)$$

$$= \sum_{i=1}^j 0 + \sum_{i=j+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \binom{i-1}{j} \left(\frac{1}{5}\right)^j \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1-j}$$

b) Posons $n = i - 1$ ($\Leftrightarrow i = n + 1$)

$$P(Y = j) = \sum_{n=j}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{5}\right)^j \left(\frac{4}{5}\right)^{n-j} = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j} \left(\frac{5}{6}\right)^j \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5}\right)^j \left(\frac{4}{5}\right)^{n-j} = \frac{1}{6^{j+1}} \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-j}$$

$$c) P(Y = j) = \frac{1}{6^{j+1}} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{j+1}} = \frac{1}{6^{j+1}} \times 3^{j+1} = \frac{1}{2^{j+1}}.$$

d) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, P(Z = j) = P(Y + 1 = j) = P(Y = j - 1) = \frac{1}{2^{j-1+1}} = \frac{1}{2^{j-1}} \times \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{j-1} \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } Z \rightarrow \mathcal{G}(1/2). \quad E(Z) = \frac{1}{1/2} = 2 \quad V(Z) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$Y = Z - 1 \text{ donc } E(Y) = E(Z) - 1 = 1 \quad V(Y) = 1^2 V(Z) = 2$$

6) Plus on a fait de lancers pour obtenir un '6', plus on a de chances d'avoir fait des '1'.

$$\text{Donc } \text{cov}(X, Y) \geq 0 \quad E(XY) - E(X)E(Y) \geq 0 \quad E(XY) \geq E(X)E(Y).$$

Exercice 2

1) X et Y compte respectivement le nombre de 1 et de 2 (probabilités $1/6$) lors de 10 lancers indépendants.

Donc $X \rightarrow \mathcal{B}(10, 1/6)$ et $Y \rightarrow \mathcal{B}(10, 1/6)$.

2) $P((X = 10) \cap (Y = 10)) = 0$ (impossible) et $P(X = 10) = P(Y = 10) = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \neq 0$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3) Plus on obtient de "1", moins on obtient de "2", donc $\rho(X, Y) < 0$.

4) a) $X + Y$ compte le nombre de lancers dont le résultat est 1 ou 2 (probabilité $1/3$) donc

$$X + Y \rightarrow \mathcal{B}(10, 1/3).$$

$$b) V(X) = 10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18} (= V(Y)) \quad V(X + Y) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{V(X + Y) - V(X) - V(Y)}{2} = \frac{\frac{20}{9} - \frac{25}{9}}{2} = -\frac{5}{18}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-\frac{5}{18}}{\frac{25}{18}} = -\frac{1}{5} < 0$$

$$c) \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \text{ donc } E(XY) = \text{cov}(X, Y) + E(X)E(Y) = -\frac{5}{18} + \frac{25}{9} = \frac{-5 + 50}{18} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}$$

Exercice 3

$$1) \forall k \in \mathbb{N}, F_Y(k) = P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k) = 1 - P(\text{"les } k \text{ premiers sont des échec"}) = 1 - q^k$$

$$2) X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{N}^*. P(Y = X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) \text{ (indépendance)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} q^{k-1} p = \frac{p}{q} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!} = \frac{p e^{-\lambda}}{q} (e^{\lambda q} - 1)$$

$$3) a) \text{ Par linéarité, } E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{1}{p} - \lambda = \frac{1 - p\lambda}{p}$$

$$V(Z) = V(Y + (-X)) = V(Y) + V(-X) \text{ (indépendance)} = V(Y) + V(X) = \frac{1-p}{p^2} + \lambda.$$

$$b) P(Z = 0) = P(Y = X)$$

$$\forall n \geq 1, P(Z = n) = P(Y = n + X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = n + k))$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)P(Y = n + k) \text{ (indep)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} q^{n+k-1} p = q^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} q^{k-1} p = q^n \frac{p e^{-\lambda}}{q} e^{\lambda q} = p q^{n-1} e^{-\lambda p}.$$

$$c) P(Z \geq 0) = P(Z = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z = n) = \frac{p e^{-\lambda}}{q} (e^{\lambda q} - 1) + p e^{-\lambda p} \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{p e^{-\lambda}}{q} (e^{\lambda q} - 1) + p e^{-\lambda p} \sum_{n'=0}^{+\infty} q^{n'} \quad (n'=n-1)$$

$$= \frac{p e^{-\lambda}}{q} (e^{\lambda q} - 1) + p e^{-\lambda p} \times \frac{1}{p} = \frac{p e^{-\lambda}}{q} (e^{\lambda q} - 1) + e^{-\lambda p}$$