ECG2 : Soutien Vendredi 07/02/2025
VAR à densité

Exercice 1

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x|\exp(-x^2)$.

1. Montrer que g est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité g. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. a) Montrer que X admet une espérance et déterminer sa valeur.
b) Montrer que X admet une variance et déterminer sa valeur.
4. On pose Y = -X. Montrer que Y suit la même loi que X.
5. On pose $Z = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Z.
6. Soit X' une variable aléatoire de même loi que X, et indépendante de X.
On pose U = min(X, X')
a) Déterminer la fonction de répartition de U.
b) Montrer que U est une variable à densité.

Exercices en plus :

Exercice 2

Soit f une densité de probabilité. On suppose que f est paire.
Soit X une variable aléatoire de densité f.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes, de même densité f.
On note F la fonction de répartition commune à X_1 et X_2.
On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
Montrer que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y en fonction de f et F.
(On pourra noter $x_1, \dots, x_p$ les points de discontinuité de f)

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X de densité f.
Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$. On pose $Y = aX + b$.
Montrer que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y en fonction de f.