Soutien Intégrales : Correction

Exercice 1

1) $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2}dt$ Posons $u = -t \Leftrightarrow t = -u$ donc $\frac{dt}{du} = -1$ "dt = - du"

$t = -x \Leftrightarrow u = x$ et $t = -2x \Leftrightarrow u = 2x$

Donc $f(-x) = \int_{x}^{2x} e^{-(-u)^2}(-du) = -\int_{x}^{2x} e^{-u^2}du = -f(x)$ donc f est impaire.

2) Pour $x \geq 0$ $2x \geq x$ (les bornes sont dans le bon sens)

$\forall t \in [x;2x]$ $e^{-t^2} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $f(x) \geq 0$.

Comme f est impaire, par symétrie, $f(x) \leq 0$ $\forall x \leq 0$.

3) Pour $x \geq 0$ $\forall t \in [x;2x]$ $x \leq t \leq 2x$ $x^2 \leq t^2 \leq 4x^2$ $-4x^2 \leq -t^2 \leq -x^2$ $e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$

Donc d'après l'inégalité de la moyenne (on a toujours $2x \geq x$) :

$\int_{x}^{2x} e^{-t^2}dt \leq e^{-x^2}(2x - x)$ $f(x) \leq x.e^{-x^2}$.

Pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq xe^{-x^2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x^2} = 0$ par croissances comparées,

donc par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Comme f est impaire, on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

4) Pour t $\in$ $\mathbb{R}$, posons $g(t) = e^{-t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive G.

Donc $f(x) = [G(t)]_{x}^{2x} = G(2x) - G(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de composées de fonctions dérivables et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1)$ $e^{-x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$2e^{-3x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-3x^2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -3x^2 > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 3x^2 < \ln(2) \Leftrightarrow x^2 < \frac{\ln(2)}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} < x < \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$

En posant $x_0 = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$:

x	$-\infty$		$-x_0$		0		x_0		$+\infty$
f '(x)		–	0	+		+	0	–	
f	0	$\searrow$	$-f(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	0

Exercice 2

1) $n \geq 1$ donc $n + 1 \geq 2$ donc $n + 1 > 1$. Donc l'intégrale converge.

Pour $X \geq 1$, $\int_{1}^{X} \frac{1}{x^{n+1}} dx = \int_{1}^{X} x^{-n-1} dx = \left[\frac{1}{-n} x^{-n}\right]_1^X = \left[-\frac{1}{n.x^n}\right]_1^X = -\frac{1}{n.X^n} + \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{1}{n.X^n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ donc $\forall n \geq 1$, $I_n = \frac{1}{n}$.

2) a) Pour $X \geq 1$, $\int_{1}^{X} e^{x/n}dx = [-ne^{x/n}]_1^X = -ne^{-X/n} + ne^{-1/n}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -ne^{-X/n} + ne^{-1/n} = ne^{-1/n}$ donc $J_n = ne^{-1/n}$

b) $J_n - n = n(e^{-1/n} - 1)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ donc $e^{-1/n} - 1 \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$ donc $J_n - n \sim_{+\infty} -1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n - n = -1$

Exercice 3 1) a) Soit $P \in \mathcal{E}$, $Q \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\varphi(P + Q)(x) = \int_0^1 (P + Q)(x + t)dt = \int_0^1 (P(x + t) + Q(x + t))dt = \int_0^1 P(x + t)dt + \int_0^1 Q(x + t)dt$

$= \varphi(P)(x) + \varphi(Q)(x)$

$\varphi(\lambda P)(x) = \int_0^1 (\lambda P)(x + t)dt = \int_0^1 \lambda P(x + t)dt = \lambda\int_0^1 P(x + t)dt = \lambda\varphi(P)(x)$.

Donc φ est une application linéaire.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(e_0)(x) = \int_0^1 1dt = 1$ $\qquad$ $\varphi(e_1)(x) = \int_0^1 (x + t)dt = \left[xt + \dfrac{t^2}{2}\right]_0^1 = x + \dfrac{1}{2}$

$\varphi(e_2)(x) = \int_0^1 (x + t)^2dt = \int_0^1 (x^2 + 2tx + t^2)dt = \left[x^2t + xt^2 + \dfrac{t^3}{3}\right]_0^1 = x^2 + x + \dfrac{1}{3}$.

c) Soit $P \in \mathcal{E}$. Comme (e_0, e_1, e_2) est une base de $\mathcal{E}$, il existe 3 réels a, b, c tels que $P = ae_0 + be_1 + ce_2$ (c'est-à-dire qu'il existe 3 réels a, b, c tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) = a + bt + ct^2$).

Comme φ est une application linéaire, $\varphi(P) = \varphi(ae_0 + be_1 + ce_2) = a\varphi(e_0) + b\varphi(e_1) + c\varphi(e_2)$.

Or d'après la question b, $\varphi(e_0) \in \mathcal{E}$, $\varphi(e_1) \in \mathcal{E}$ et $\varphi(e_2) \in \mathcal{E}$, donc $\varphi(P) \in \mathcal{E}$.

Comme φ est linéaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

2) a) On voit que $\varphi(e_0) = e_0$ $\quad \varphi(e_1) = e_1 + \dfrac{1}{2}e_0$ $\quad \varphi(e_2) = e_2 + e_1 + \dfrac{1}{3}e_0$.

$$A = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_0) & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

b) La matrice A est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale, donc elle est inversible. Donc φ est un automorphisme.

3) a) Pour n = 0 : $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $u_0 = 0$ convient.

Supposons qu'à un rang n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2} & \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{2} + u_n \\ 0 & 1 & 1 + n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{2} + u_n = u_n + \dfrac{1}{6}(3n + 2)$ convient.

Conclusion : En posant $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n + 2) \end{cases}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\forall i \in \mathbb{N}$, $u_{i+1} - u_i = \dfrac{1}{6}(3i + 2)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{6}(3i + 2)$ (Sommes téléscopiques) $u_n - u_0 = \dfrac{1}{6}\left(3\sum\limits_{i=0}^{n-1} i + 2\sum\limits_{i=0}^{n-1} 1\right)$

$u_n = \dfrac{1}{6}\left(3\dfrac{(n-1)n}{2} + 2n\right) = \dfrac{n}{12}(3(n - 1) + 4) = \dfrac{n(3n + 1)}{12}$