## Soutien Intégrales impropres / Réduction : Correction

**Exercice 1** 1) Sur $]-\infty;0]$, f est nulle donc $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et vaut 0.

Soit $X \geq 0$ : $\int_0^X f(x)dx = \int_0^X \lambda e^{-\lambda x}dx = [-e^{-\lambda x}]_0^X = -e^{-\lambda X} + 1$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -e^{-\lambda X} + 1 = 1$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

2) a) De même $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{0} x^2f(x)dx$ convergent et valent 0.

$\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx$

$g(x) = xe^{-\lambda x}$ est positive sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3e^{-\lambda x} = 0$ (croissances comparées) donc $xe^{-\lambda x} =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx$ aussi.

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2e^{-\lambda x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4e^{-\lambda x} = 0$ donc $x^2e^{-\lambda x} =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\int_0^{+\infty} \lambda x^2e^{-\lambda x}dx$ converge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx$ convergent.

b) Soit $X \geq 0$ et $I(X) = \int_0^X \lambda xe^{-\lambda x}dx$. Intégration par parties :

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$ (u et v sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$)

$I(X) = [-xe^{-\lambda x}]_0^X + \int_0^X e^{-\lambda x}dx = -Xe^{-\lambda X} + \left[-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^X = -Xe^{-\lambda X} - \dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda X} + \dfrac{1}{\lambda}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -Xe^{-\lambda X} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-\lambda X} = 0$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} I(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Donc $E_\lambda = 0 + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

De même, soit $J(X) = \int_0^X \lambda x^2e^{-\lambda x}dx$. Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$

(u et v sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$)

$J(X) = [-x^2e^{-\lambda x}]_0^X + \int_0^X 2xe^{-\lambda x}dx = -X^2e^{-\lambda X} + \dfrac{2}{\lambda}I(X)$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -X^2e^{-\lambda X} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{X \to +\infty} I(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. Donc $\lim\limits_{X \to +\infty} J(X) = \dfrac{2}{\lambda^2}$ et $F_\lambda = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

c) Posons $h(x) = \lambda|x|\exp(-\lambda|x|)$ sur $\mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} h(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda.x.\exp(-\lambda x)dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

De plus h est paire sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$ converge et vaut $\dfrac{2}{\lambda}$.

3) $\forall x < 0$, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$ $\quad \forall x \geq 0$, $G(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = 0 + -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$

Donc $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

$\forall x < 0$, $H(x) = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 0 + 1 = 1$

$\forall x \geq 0$, $H(x) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt$ $\quad$ Soit $X \geq x$ $\quad \int_x^X \lambda e^{-\lambda t}dt = [-e^{-\lambda t}]_x^X = -e^{-\lambda X} + e^{-\lambda x}$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -e^{-\lambda X} = 0$ donc $H(x) = e^{-\lambda x}$

Ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - G(x)$. $\quad$ Donc $H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

Remarque : On verra bientôt que f correspond à la densité de la loi exponentielle, que $E_\lambda$ correspond à la variance, $F_\lambda$ à $E(X^2)$, et G à la fonction de répartition.

**Exercice 2**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (-8 - \lambda)x - 10y = 0 \\ 5x + (7 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{cases} 5x + (7 - \lambda)y = 0 \\ (- 8 - \lambda)x - 10y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + (7 - \lambda)y = 0 \\ (- \lambda^2 - \lambda + 6)y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow (8 + \lambda)L_1 + 5L_2$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $- \lambda^2 - \lambda + 6 = 0$ $(\lambda - 2)(- \lambda - 3) = 0$

$\lambda = 2$ ou $\lambda = -3$ $Sp(A) = \{-3; 2\}$.

_ $\lambda = -3$ : $\begin{cases} 5x + 10y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$ donc $E_{-3} = Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc est une base de $E_{-3}$.

_ $\lambda = 2$ : $5x + 5y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ $E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc est une base de $E_2$.

**Exercice 3**

1) $C_2 = C_1 + C_3$ donc la matrice A n'est pas inversible. Donc 0 est une valeur propre de A.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -5 - \lambda & -8 & -3 \\ 3 & 6 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 & - \lambda \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-5 - \lambda)x - 8y - 3z = 0 \\ 3x + (6 - \lambda)y + 3z = 0 \\ 2x + 2y - \lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - \lambda z = 0 \\ 3x + (6 - \lambda)y + 3z = 0 \\ (-5 - \lambda)x - 8y - 3z = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - \lambda z = 0 \\ (2\lambda - 6)y + (- 3\lambda - 6)z = 0 & L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ (6 - 2\lambda)y + (\lambda^2 + 5\lambda + 6)z = 0 & L_3 \leftarrow (-5 - \lambda)L_1 - 2L_3 \end{cases}$ $(-5 - \lambda)(- \lambda) + 6 = \lambda^2 + 5\lambda + 6$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - \lambda z = 0 \\ (2\lambda - 6)y + (-3\lambda - 6)z = 0 \\ (\lambda^2 + 2\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $2\lambda - 6 = 0$ ou $\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda(\lambda + 2) = 0$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda = 3$, $\lambda = 0$ et $\lambda = -2$

**Exercice 4**

1) La fonction ln est définie et continue sur ]0 ; + ∞[ et ne s'annule que pour 1.

Donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^{\beta}}$ est continue sur [e ;+ ∞[

$\dfrac{1}{t(\ln(t))^{\beta}} = \dfrac{1}{t}(\ln(t)^{-\beta}$ est de la forme u'.u$^{-\beta}$

Soit $X \geq e$

_ si $\beta \neq 1$ $\displaystyle\int_e^X \frac{1}{t(\ln(t))^{\beta}}dt = \left[\frac{1}{1-\beta}(\ln(t))^{1-\beta}\right]_e^X = \frac{1}{1-\beta}(\ln(X))^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta}$

Si $1 - \beta > 0$ ($\Leftrightarrow \beta < 1$) $\lim\limits_{X \to +\infty}(\ln(X))^{1-\beta} = +\infty$ l'intégrale diverge

Si $1 - \beta < 0$ ($\Leftrightarrow \beta > 1$) $\lim\limits_{X \to +\infty}(\ln(X))^{1-\beta} = 0$ l'intégrale converge et vaut $\dfrac{1}{\beta - 1}$.

_ Si $\beta = 1$ $\displaystyle\int_e^X \frac{1}{t.\ln(t)}dt = [\ln(\ln(X))]_e^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(e)) = \ln(\ln(X))$ $\lim\limits_{X \to +\infty}\ln(\ln(X)) = +\infty$ donc l'intégrale diverge.

Conclusion : L'intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^{\beta}} = \frac{1}{\beta - 1}$.

2) Si $\alpha > 1$ : $\forall t \geq e$ $\ln(t) \geq 1$ $\ln(t)^{\beta} \geq 1$ (car $\beta \geq 0$) $t^{\alpha}\ln(t)^{\beta} \geq t^{\alpha}$ $\dfrac{1}{t^{\alpha}\ln(t)^{\beta}} \leq \dfrac{1}{t^{\alpha}}$ Les fonctions sont positives et $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}dt$ converge, donc par comparaison $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}$ converge aussi.

Si $\alpha < 1$ :

$$\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}} = \frac{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}{t} = \frac{(\ln(t))^{\beta}}{t^{1-\alpha}}$$ $1 - \alpha > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty}\dfrac{(\ln(t))^{\beta}}{t^{1-\alpha}} = 0$ par croissances comparées.

Donc $\dfrac{1}{t} =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^{\alpha}\ln(t)^{\beta}}\right)$. Les fonctions sont positives et $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ diverge donc $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}}$ diverge aussi.

Conclusion :

| | $\alpha < 1$ | $\alpha = 1$ | $\alpha > 1$ |
|---|---|---|---|
| $\beta \leq 1$ | diverge | diverge | converge |
| $\beta > 1$ | diverge | converge | converge |