

ECG2 : Soutien Vendredi 17/01/25
Intégrales impropres / Valeurs propres d'une matrice

Exercice 1

λ désigne un réel strictement positif.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. a) Montrer que les intégrales $E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ et $F_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx$ sont bien définies.
b) Déterminer les valeurs de E_λ et F_λ .
- c) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |x| \exp(-\lambda |x|) dx$ converge et déterminer sa valeur
3. a) Soit G et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ et $H(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$.
a) Déterminer l'expression de $G(x)$ en fonction de x .
b) En déduire l'expression de $H(x)$ en fonction de x .

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

A l'aide d'un système, déterminer les valeurs propres de A , et une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A .
- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A .

Exercice 4 – Pour aller plus loin :

- 1) Soit β un réel positif ou nul. Etudier, en distinguant les cas suivant les valeurs de β la nature de l'intégrale

$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta}$. Dans le cas où elle est convergente, déterminer sa valeur.

- 2) De manière générale, soit α et β deux réels positifs ou nuls.

Etudier, en distinguant les cas suivant les valeurs de α et β la nature de l'intégrale $I_{\alpha, \beta} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$.