Soutien – Vendredi 14 Mars 2025 - Correction

Exercice 1

1. a) f est de clase C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1 f(x, y) = 4x + 2y - 1 \quad \partial_2 f(x, y) = 4y + 2x - 1$

b) Points critiques : $\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 6y = 1 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/6 \\ y = 1/6 \end{cases}$

2) a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,1} f(x, y) = 4 \quad \partial^2_{2,1} f(x, y) = 2 \quad \partial^2_{1,2} f(x, y) = 2 \quad \partial^2_{2,2} f(x, y) = 4$.

b) Hessienne au point A : $H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $H - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow (4 - \lambda)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (4 - \lambda - 2)(4 - \lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$

Les deux valeurs propres sont 2 et 6. Elles sont strictement positives donc il s'agit d'un **minimum local**.

d) $m = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

3) a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{36}\right)$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} = f(x,y) + \frac{1}{6}$

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ et $\frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$, donc $f(x,y) + \frac{1}{6} \geq 0$

$f(x,y) \geq -\frac{1}{6} \quad f(x, y) \geq f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ donc A est un **minimum global de f**.

4) a) On voit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = f(e^x, e^y)$. Donc d'après la question 3.b) $g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$

b) Attention, pour l'instant, $-\frac{1}{6}$ est seulement un minorant, mais pas encore un mínimum.

Il faut encore trouver un couple (x, y) tel que $g(x,y) = -\frac{1}{6}$.

$g(x,y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow f(e^x, e^y) = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{1}{6} \\ e^y = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln(6) \\ y = -\ln(6) \end{cases}$.

Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geq g(-\ln(6), -\ln(6))$. Donc g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, qui vaut $-\frac{1}{6}$, et qui est atteint en $(-\ln(6), -\ln(6))$.

Exercice 2 1) $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

2) a) X est à valeurs dans [-1;1], donc $Y = |X|$ est à valeurs dans [0;1].

Donc $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$.

b) $\forall x \in [0;1]$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x)$ (car $x \geq 0$) $= F_X(x) - F_X(-x)$

$0 \leq x \leq 1$ donc $-1 \leq -x \leq 0$. Donc $F_X(x) = \frac{x+1}{2} \qquad F_X(-x) = \frac{-x+1}{2} \qquad F_Y(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{-x+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

c) $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ donc Y suit la loi uniforme sur [0;1].

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P((X \leq x) \cap (X' \leq x)) = P(X \leq x)P(X' \leq x)$ (par indépendance)
$= F_X(x)\, F_{X'}(x) = F_X(x)^2$ (même loi).

Donc $F_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{4} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

b) F_Z est continue et de classe C^1 sur $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;+\infty[$ (fonction constante ou polynomiale).

$\lim\limits_{x \to -1} 0 = 0 \quad \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)^2}{4} = 0$ donc F_Z est continue en -1.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} 1 = 1$ donc F_Z est continue en 1.

Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en -1 et 1. Donc Z est une variable à densité.

Dérivée de $\dfrac{(x+1)^2}{4}$: $\dfrac{2(x+1) \times 1}{4} = \dfrac{x+1}{2}$

$F_Z'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} \text{ si } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ **(intervalles ouverts !)** donc une densité est : $f_Z(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

c)
```
import numpy.random as rd
x=-1+2*rd.random(2)
z=max(x)
```

Exercice 3 Soit X une VAR qui suit la loi $\mathcal{E}(1/2)$. Alors $E(X) = \dfrac{1}{1/2} = 2$

Donc $E(X) = \int_0^{+\infty} x\left(\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\right)dx = 2$. Donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x/2}dx = 4$.

De même, $V(X) = \dfrac{1}{1/4} = 4$ donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 8 \quad \int_0^{+\infty} x^2\left(\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\right)dx = 8$. Donc $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x/2}dx = 16$.

Exercice 4

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$ _ si $x < 0$ pas de solutions $F_Y(x) = 0$

_ si $x \geq 0$ $F_Y(x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$

Donc $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

b) F_Y est continue et de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ (fonction constante) et sur $]0;+\infty[$ (car Φ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont de classe C^1 sur $]0;+\infty[$).

En 0 : $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \quad \lim\limits_{x \to 0} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = 2\,\Phi(0) - 1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$ donc F_Y est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Donc Y est une VAR à densité

Dérivée de $2\Phi(\sqrt{x}) - 1$ sur $]0;+\infty[$ (dérivée d'une composée) :

$2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \Phi'(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\sqrt{x}^2}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ *(attention : non défini en 0 !)*

Donc une densité de Y est : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

3) $Y = X^2$ donc $E(Y) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 0 + 1^2 = 1$