Soutien Vendredi 14 Mars 2025
Fonctions à deux variables – Lois usuelles - Exercices

Exercice 1 (d'après EDHEC)
Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y .$$
1. a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
b) En déduire que le seul point critique de f est A = (1/6, 1/6) .
2. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
b) Le point A est-il un extremum local ?
c) Calculer m = f(1/6, 1/6)
3. a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$
b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
(En plus)
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, par :
$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$
a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) \geq -\frac{1}{6}$
b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([-1,1])$.
1) Rappeler la fonction de répartition de X.
2) On pose $Y = |X|$.
a) Sans calcul, déterminer $F_Y(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 1$.
b) Déterminer l'expression de $F_Y(x)$ pour $x \in [0;1]$.
c) En déduire que Y suit une loi usuelle que l’on précisera.
3) Soit X' une variable aléatoire de même loi que X, et indépendante de X.
On pose Z = max(X, X').
a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
b) En déduire que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z.
c) Ecrire un programme Python qui simule la loi de Z.

Exercice 3
Déterminer la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} x.e^{-x/2}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2}\,dx$.

Exercice 4
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note $Y = X^2$.
1) Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de Φ.
2) Montrer que Y est une VAR à densité, et déterminer une densité de Y.
3) Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.