Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $A^2 - 4A$.
- 2) En déduire le spectre de A .
- 3) A est-elle diagonalisable ? (vous répondrez à cette question de deux manières différentes).

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer les valeurs propres de A , et une base de chacun des sous-espaces propres associés.
- 2) A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A .

- 1) a) Déterminer un vecteur u de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$.
- b) En déduire une valeur propre de A et le sous-espace propre correspondant.
- 2) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer un vecteur v tel que $E_1(A) = \text{Vect}(v)$.
- 3) Montrer que A n'a pas d'autres valeurs propres que les deux trouvées précédemment.
- 4) A est-elle diagonalisable ?
- 5) Déterminer un vecteur w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(w) = v + w$.
- 6) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
- 7) Sans calcul, déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.
- 8) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la matrice A^n en fonction de n , P , P^{-1} et T .
- 9) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ en fonction de u , v et w .
- c) En déduire les coefficients de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 – Exercice en plus

- 1) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent.
Soit λ une valeur propre de A telle que $E_\lambda(A)$ est de dimension 1. Montrer que tout vecteur propre de A associé à λ est aussi vecteur propre de B .
- 2) Montrer que cette propriété est fautive si $E_\lambda(A)$ n'est pas de dimension 1.