Soutien Vendredi 26/09/24 - Correction

Exercice 1

1) $\displaystyle\sum_{n\ge 2}\frac{n^2}{3^n}=\sum_{n\ge 2}\frac{n(n-1)+n}{3^n}=\sum_{n\ge 2}\frac{n(n-1)}{3^n}+\sum_{n\ge 2}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{9}\sum_{n\ge 2}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\sum_{n\ge 2}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$-1<\dfrac{1}{3}<1$ donc les séries convergent et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{9}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\times 2\times\frac{3^3}{2^3}+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}-1\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{9}{12}+\frac{5}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

2) a) $\forall n\ge 1\quad \dfrac{1}{n}\le 1\quad \dfrac{x^n}{n}\le x^n$ (car $x^n\ge 0$)

b) Les séries sont à termes positifs et la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0}x^n$ converge (car $-1<x<1$), donc la série $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}$ converge aussi.

3) $\dfrac{e^{-n^2}}{1/n^2}=n^2e^{-n^2}\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^2e^{-n^2}=0$ (par croissances comparées) donc $e^{-n^2}=_{+\infty}o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Les séries sont à termes positifs et la série $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0}e^{-n^2}$ converge aussi.

Exercice 2

1) Par récurrence :

_ $u_0=1$ donc $1\le u_0\le\alpha$.

_ supposons qu'à un rang n, u_n existe et $1\le u_n\le\alpha$.

$u_n\ge 1$ donc $u_n>0$ donc $\ln(u_n)$ existe donc u_{n+1} existe.

De plus, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall\, x>0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-x+2}{2x}$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$1\le u_n\le\alpha$ et f croissante sur $]0;2]$ donc $f(1)\le f(u_n)\le f(\alpha)$

$1\le\dfrac{3}{2}\le u_{n+1}\le\alpha$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $1\le u_n\le\alpha$.

2) $u_0=1\quad u_1=-\dfrac{1}{2}+\ln(1)+2=\dfrac{3}{2}$

Montrons par récurrence que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\ge u_n$:

_ $u_1\ge u_1$ d'après les calculs précédents

_ supposons qu'à un rang n, $u_{n+1}\ge u_n$:

Alors $f(u_{n+1})\ge f(u_n)$ (f croissante) $\quad u_{n+2}\ge u_{n+1}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\ge u_n$. La suite (u_n) est croissante.

Comme (u_n) est majorée par α, (u_n) converge vers un réel L.

D'après le théorème du point fixe, $f(L)=L$ donc $L=\alpha$ d'après la première question. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

3) a) $\forall x\in[1;\alpha]$, $\quad 1\le x\le\alpha\quad \dfrac{1}{\alpha}\le\dfrac{1}{x}\le 1\qquad \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}$

$\forall\, x\in[1;\alpha]$, $f'(x)\le\dfrac{1}{2}\qquad u_n\in[1;\alpha]\ \forall n\in\mathbb{N}\quad \alpha\in[1;\alpha]$ et $u_n\le\alpha$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $f(\alpha) - f(u_n) \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$ $\quad \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$.

b) On sait déjà que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$ donc $\alpha - u_n \geq 0$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha - u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

_ $\alpha - u_0 = \alpha - 1 \leq 1$ car $\alpha \leq 2$

_ supposons qu'à un rang n, $\alpha - u_n \leq \frac{1}{2^n}$, $\quad \frac{1}{2}(\alpha - u_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Or $\alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$ donc $\alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{2^n}$.

4) u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près $\Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \alpha - u_n \leq 10^{-3}$ (car $u_n - \alpha < 0$)

Pour que $\alpha - u_n \leq 10^{-3}$, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$

$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 2^n \geq 10^3 \Leftrightarrow n.\ln(2) \geq 3\ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln(10)}{\ln(2)}$ ($\approx 9{,}96$). $n_0 = 10$ convient.

Exercice 3

1) a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \geq 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \geq 0$

$f_n(0) = -4 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	0 $\quad +$	
$f_n(x)$	-4	$+\infty$

f_n est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $0 \in [-4; +\infty[$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $[0; +\infty[$.

b) $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{10} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ou $-\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Or $u_2 \geq 0$ donc $u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

c) $f_n(u_n) = 0 \quad f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 \times \frac{4}{9} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0$

Donc $f_n(u_n) \leq f_n\left(\frac{2}{3}\right)$. Comme f_n est croissante sur $[0: +\infty[$, $u_n \leq \frac{2}{3}$.

2) a) $\forall\ x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - (x^n + 9x^2 - 4) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$

$x \in]0;1[$ donc $x^n \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$ donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ donc $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

b) $u_{n+1} \in]0;2/3[$ donc $u_{n+1} \in]0;1[$. D'après la question a), $f_{n+1}(u_{n+1}) \leq f_n(u_{n+1})$

$0 \leq f_n(u_{n+1}) \quad f_n(u_n) \leq f_n(u_{n+1}) \quad$ Or f_n est croissante, donc $u_n \leq u_{n+1}$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, donc elle converge vers un réel L.

3) a) $\forall\ n \geq 1 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$ donc $0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. $\ -1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Donc par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$.

b) Or $f_n(u_n) = 0 \quad u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0 + 9L^2 - 4 = 9L^2 - 4$.

Donc $9L^2 - 4 = 0 \quad L^2 = \frac{4}{9} \quad L = \frac{2}{3}$ ou $-\frac{2}{3}$ (impossible car $u_n \geq 0$). Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.