

Soutien – Vendredi 27 Septembre 2024
Suites et séries

Exercice 1 Les trois questions sont indépendantes

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{n^2}{3^n}$ converge et déterminer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
- 2) Soit $x \in]0;1[$.
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x^n}{n} \leq x^n$.
 - b) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est-elle convergente ?
- 3) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \exp(-n^2)$ est convergente.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln(x) + 2$.

On admet que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$, et que $1 < \alpha < 2$.

On donne : $\frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \approx 9,96$

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $1 \leq u_n \leq \alpha$.
- 2) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{2^n}$.
- 4) Déterminer un rang n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 3 (d'après EDHEC)

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique réel u_n strictement positif tel que $f_n(u_n) = 0$.
b) Calculer u_2 .
c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0; 2/3[$.
- 2) a) Montrer que $\forall x \in]0;1[, f_{n+1}(x) < f_n(x)$
b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite (u_n) .
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel L qu'on ne cherche pas à déterminer pour l'instant.
- 3 a) En utilisant la question 1.c), déterminer la limite de u_n^n .
b) Donner enfin la valeur de L .