

Exercice 1

1) g est positive sur $\mathbb{R}$ (produit de facteurs positifs) et continue sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions continues).

$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = |-x|e^{-(-x)^2} = |x|e^{-x^2} = g(x)$ donc g est paire.

Soit $X \geq 0$. On note $I(X) = \int_0^X xe^{-x^2} = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^X = -\frac{1}{2}e^{-X^2} + \frac{1}{2}$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^{-X^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$ donc par parité $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

Donc g est une densité de probabilité.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$

si $x < 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_{-\infty}^x -t \cdot e^{-t^2} dt$

Soit $X \leq x : \int_X^x -t \cdot e^{-t^2} dt = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_X^x = \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-X^2} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-X^2} = \frac{1}{2}e^{-x^2}$ donc $F_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}$.

$\forall x \geq 0, F_X(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_{-\infty}^0 g(t)dt + \int_0^x g(t)dt = \frac{1}{2} + \int_0^x te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2}$.

$$\text{donc } F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3) a) La fonction $x \mapsto x \cdot g(x)$ est impaire.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(x \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-x^2} = 0$ par croissance comparées.

Donc $x \cdot g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Les fonctions sont continues et positives et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc $\int_0^{+\infty} x \cdot g(x) dx$ converge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) dx$ converge et vaut 0. Donc X admet une espérance et $E(X) = 0$.

b) De même, la fonction $x \mapsto x^2 g(x)$ est paire.

Soit $X \geq 0$ et $J(X) = \int_0^X x^2 g(x) dx = \int_0^X x^3 e^{-x^2} dx$

Intégration par parties : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = x e^{-x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $[0; +\infty[$.

Donc $J(X) = \left[-\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} \right]_0^X + \frac{1}{2} \int_0^X x e^{-x^2} dx = -\frac{X^2 e^{-X^2}}{2} + \frac{1}{2} I(X)$.

$\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X^2 e^{-X^2}}{2} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) = 1$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} J(X) = \frac{1}{2}$.

Donc $\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx$ converge et vaut 1. $E(X^2) = 1$.

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x) \quad -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

_ si $x \leq 0, -x \geq 0$ donc $F_Y(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \exp(-(-x)^2) \right) = \frac{1}{2} \exp(-x^2)$

_ si $x > 0, -x < 0$ donc $F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2} \exp(-(-x)^2) = 1 - \frac{1}{2} \exp(-x^2)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = F_X(x)$. Donc Y suit la même loi que X .

5) $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x)$

_ si $x < 0$, pas de solution $F_Z(x) = 0$

_ si $x \geq 0$, $F_Z(x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

Comme $\sqrt{x} \geq 0$ $F_X(\sqrt{x}) = 1 - \frac{1}{2} \exp(-(\sqrt{x})^2) = 1 - \frac{1}{2} \exp(-x)$

$-\sqrt{x} \leq 0$ donc $F_X(-\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \exp(-(-\sqrt{x})^2) = \frac{1}{2} \exp(-x)$

Donc $F_Z(x) = 1 - \frac{1}{2} \exp(-x) - \frac{1}{2} \exp(-x) = 1 - \exp(-x)$. Conclusion : $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

6) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = P(U \leq x) = 1 - P(U > x) = 1 - P((X > x) \cap (X' > x))$

$= 1 - P(X > x)P(X' > x)$ (par indépendance)

$= 1 - P(X < x)^2$ (même loi)

$= 1 - (1 - F_X(x))^2$

si $x < 0$ $F_U(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-x^2}\right)^2$ si $x \geq 0$, $F_U(x) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-x^2}\right)\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} e^{-2x^2}$

$$F_U(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-x^2}\right)^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{4} e^{-2x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On voit que F_U est continue et de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-x^2}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{4} e^{-2x^2} = \frac{3}{4}$ donc F_U est continue en 0.

F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, donc U est une densité de probabilité.

Exercice 2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt$

Posons $u = -t$ ($\Leftrightarrow t = -u$) Changement de variable affine, donc autorisé $\frac{dt}{du} = -1$ "dt = -du"

Bornes : $t = -x \Leftrightarrow u = x$ $t \longrightarrow -\infty \Leftrightarrow u \longrightarrow +\infty$

Donc $F_X(-x) = \int_{+\infty}^x f(-t)(-dt) = \int_x^{+\infty} f(-t)dt = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ (car f est paire)
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \int_{-\infty}^x f(t)dt = 1 - F_X(x)$

Exercice 3

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)$ (par indépendance)

$= F_{X_1}(x)F_{X_2}(x) = F(x)^2$

X_1 et X_2 sont des variables à densité, de densité f .

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en $\{x_1, \dots, x_p\}$. Donc $F_Y = F^2$ aussi.

Donc Y est une variable à densité.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ $F_Y'(x) = 2F(x)f'(x) = 2F(x)f(x)$.

Donc une densité de Y est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = 2F(x)f(x)$.

Exercice 4

$\forall y \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b)$

_ si $a > 0$: $F_Y(x) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composée F_Y aussi.

Avec les mêmes notations que l'exemple précédent, $\frac{y-b}{a} = x_i \Leftrightarrow y = ax_i + b$.

En dehors des points $y_i = ax_i + b$, F_Y est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 .
Donc Y est une variable à densité.

$$\text{Pour tout } y \text{ différent des } (y_i) \quad F_Y'(y) = \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

$$\text{Donc une densité est définie par : } \forall y \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

$$\text{— si } a < 0, \text{ on a : } F_Y(y) = P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$\text{De la même manière, on a donc : } Y \text{ est à densité et une densité est : } f_Y(y) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

$$\text{Donc de manière générale, } Y \text{ est une VAR à densité et admet pour densité : } f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$