Soutien Vendredi 11/10 - Correction

Exercice 1

1) $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\} = \mathbb{N} - \{0,1\}$

2) $(X = 2)$ = "Après deux lancers, on trouve deux résultats différents"

$P(X = 2) = \dfrac{6 \times 5}{6 \times 6} = \dfrac{5}{6}$

$(X = 3)$ = "les deux premiers résultats sont les mêmes, le troisième est différent"

$P(X = 3) = \dfrac{6 \times 1 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{5}{36}$

3) $\forall\, k \geq 2$, $(X = k)$ = "les $k - 1$ premiers sont identiques, le k-ème est différent"

$P(X = k) = \dfrac{6 \times 1 \times \dots \times 1 \times 5}{6^k} = \dfrac{5}{6^{k-1}}$.

4) $\displaystyle\sum_{k \geq 2} kP(X = k) = \sum_{k \geq 2} k\frac{5}{6^{k-1}} = 5\sum_{k \geq 2} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = 5\sum_{k \geq 1} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} - 5 \times 1$

$-1 < \dfrac{1}{6} < 1$ donc la série converge absolument. Donc X admet une espérance et

$E(X) = 5 \times \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)2} - 5 = 5 \times \dfrac{36}{25} - 5 = \dfrac{36}{5} - \dfrac{25}{5} = \dfrac{11}{5}$.

5) $\displaystyle\sum_{k \geq 2} k^2P(X = k) = \sum_{k \geq 2} (k(k-1) + k)\frac{5}{6^{k-1}} = 5\sum_{k \geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \sum_{k \geq 2} k\frac{5}{6^{k-1}}$

(la deuxième série converge et la somme vaut 11/5).

$$= \frac{5}{6}\sum_{k \geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} + \dots$$

$-1 < \dfrac{1}{6} < 1$ donc les séries convergent absolument. Donc X^2 admet une espérance et

$E(X^2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)3} + \dfrac{11}{5} = \dfrac{5}{6} \times 2 \times \dfrac{6^3}{5^3} + \dfrac{11}{5} = \dfrac{72}{25} + \dfrac{55}{25} = \dfrac{127}{25}$

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{127}{25} - \dfrac{121}{25} = \dfrac{6}{25}$.

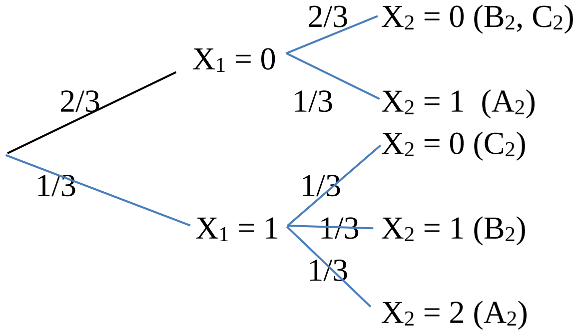
6) $X(\Omega) = \{2, 3, \dots\}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall\, k \geq 1$, $P(Y = k) = P(X - 1 = k) = P(X = k + 1) = \dfrac{5}{6^k} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6^{k-1}} = \dfrac{5}{6}\left(1 - \dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$. Donc $Y \longrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{5}{6}\right)$

Donc $E(Y) = \dfrac{1}{5/6} = \dfrac{6}{5}$ $\quad V(Y) = \dfrac{1 - 5/6}{(5/6)^2} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{6^2}{5^2} = \dfrac{6}{25}$

$X = Y + 1$ donc $E(X) = E(Y) + 1 = \dfrac{11}{5}$ $\quad V(X) = 1^2V(Y) = \dfrac{6}{25}$.

Exercice 2 1) $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ $P(X_1 = 1) = P(A_1) = \frac{1}{3}$ $\quad P(X_1 = 0) = P(B_1 \cup C_1) = \frac{2}{3}$



Avec la famille $(X_1 = 0)$, $(X_1 = 1)$ comme système complet d'événements, on trouve :

$P(X_2 =0) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$ $\qquad P(X_2 = 1) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ $\qquad P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

i	0	1	2
$P(X_1 = i)$	2/3	1/3	
$P(X_2 = i)$	5/9	3/9	1/9

b) $E(X_1) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\left(\text{ou : } X_1 \longrightarrow \mathcal{B}(1/3) \text{ donc } E(X_1) = \frac{1}{3}\right)$

2) Pour n quelconque, $X_n(\Omega) = \{0, ..., n\}$

3) $(X_n = n) = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ donc par indépendance, $p_n = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

4) $\forall$ a > 0,

$(X_{n+1} = a)$ = "soit on avait déjà a points après n tirages et on tire B, soit on avait a – 1 et on tire A"

$\qquad = ((X_n = a)\cap B_{n+1})\cup(X_n = a - 1)\cap A_{n+1})$

Par incompatibilité et indépendance, $P(X_{n+1} = a) = P(X_n = a) \times \frac{1}{3} + P(X_n = a - 1) \times \frac{1}{3}$.

5) $E(X_{n+1}) = \sum_{a=0}^{n+1} aP(X_{n+1} = a) = 0 \times P(X_{n+1} = 0) + \sum_{a=1}^{n+1} aP(X_{n+1} = a)$

$= \sum_{a=1}^{n+1} a\left(P(X_n = a) \times \frac{1}{3} + P(X_n = a - 1) \times \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n+1} a.P(X_n = a) + \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n+1} a.P(X_n = a - 1)$

Or $\sum_{a=1}^{n+1} a.P(X_n = a) = \sum_{a=0}^{n} a.P(X_n = a) + (n + 1)P(X_n = n + 1) - 0.P(X_n = 0) = E(X_n) + 0 - 0 = E(X_n)$

$\sum_{a=1}^{n+1} a.P(X_n = a - 1) = \sum_{a'=0}^{n} (a' + 1)P(X_n = a')$ (avec $a' = a - 1$)

$= \sum_{a'=0}^{n} a'P(X_n = a') + \sum_{a'=0}^{n} P(X_n = a') = E(X_n) + 1$

Donc $E(X_{n+1}) = \frac{1}{3} E(X_n) + \frac{1}{3}(E(X_n) + 1) = \frac{2}{3} E(X_n) + \frac{1}{3}$.

b) La suite $(E(X_n))$ est donc une suite arithmético-géométrique. Point fixe : $c = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 1$.

Donc la suite $v_n = E(X_n) - 1$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Donc $\forall n \geq 1$, $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_1$ $\quad$ avec $v_1 = E(X_1) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ $\qquad E(X_n) - 1 = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\qquad E(X_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 3

1) On reconnait la série exponentielle. Donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}$.

On remarque que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \dots$

et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!} = 1 - \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \dots$

Donc que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!} = 2\left(1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \dots\right) = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ Donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$

b) Soit A l'événement : (X est paire)

Alors A = $\bigcup_{k=0}^{+\infty}$ (X = 2k) et par incompatibilité des événements,

$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}e^{-\lambda}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \times \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$

$e^{-2\lambda} > 0$ donc $P(A) > \frac{1}{2}$ X a plus de chance d'être pair que d'être impair.

2°) De même, si $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$, $P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$ (car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$)

$= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1}p$ (avec $q = 1 - p$)

$= qp\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2}$

$= qp\sum_{k'=0}^{+\infty} (q^2)^{k'}$ ($k' = k - 1$)

$= qp\,\frac{1}{1 - q^2} = \frac{qp}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{q}{1 + q}$

Et $\frac{q}{1 + q} - \frac{1}{2} = \frac{2q - (1 + q)}{2(1 + q)} = \frac{q - 1}{2(1 + q)} < 0$ donc $P(A) < \frac{1}{2}$. X a plus de chances d'être impaire.