ECG2 : Soutien Vendredi 11 Octobre 2024

Exercice 1

On considère un dé équilibré. On lance le dé une première fois, puis on le relance jusqu'à obtenir un résultat différent du premier. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires en tout.

1) Déterminer $X(\Omega)$.

2) Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

3) Déterminer $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

4) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{11}{5}$.

5) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \frac{6}{25}$.

6) En étudiant la loi de la variable $Y = X - 1$, retrouver les résultats des questions 4. et 5.

Exercice 2

On dispose d'une boite contenant trois objets, appelés A, B et C. Un jeu consiste en une succession de tirages d'un objet, avec remise dans la boîte après chaque tirage. A chaque tirage, le joueur gagne 1 euro s'il tire l'objet A, ne gagne rien ni ne perd rien s'il tire l'objet B et perd tout ce qu'il a gagné précédemment s'il tire l'objet C. On note X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue de n tirages.

1) a) Déterminer les lois de X_1 et X_2.

b) Déterminer $E(X_1)$.

2) Déterminer $X_n(\Omega)$ pour n quelconque.

3) On pose $p_n = P(X_n = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.

4) Soient a un entier naturel non nul. Montrer que $P(X_{n+1} = a) = \frac{1}{3}P(X_n = a) + \frac{1}{3}P(X_n = a - 1)$.

5) a) *(Un peu plus difficile…)* En déduire que $\forall\, n \geq 1$, $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + \frac{1}{3}$

b) Déterminer $E(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 3 – En plus

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1°) On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Déterminer $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!}$. En déduire $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$

b) X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

2°) Que se passe-t-il si X suit la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0;1[$?