Soutien ECG2 18 Octobre : Correction

Exercice 1

Pour que $|u_n - r| \leq 10^{-9}$, il suffit que $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-9}$

```
from numpy import *
u=0;n=0;
while 1/2**(n-1)>10**-9:
   n=n+1
   u=sqrt(u+1)
print(u)        ⟶ on trouve : 1.6180339887498947
```

Ou : $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 10^9 \Leftrightarrow (n-1)\ln(2) \geq 9\ln(10) \Leftrightarrow n - 1 \geq \frac{9\ln(10)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{9\ln(10)}{\ln(2)}$

```
import numpy as np
u=0;
n0=int(9*np.log(10)/np.log(2)+1)+1;
for n in range(1,n0+1):
   u=np.sqrt(u+1)
print(u)
```

Exercice 2

$$\begin{cases} x + y + m.z = 0 \\ x + m.y + z = 0 \\ m.x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = 0 & \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 & \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 & \\ (2 - m - m^2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $m - 1 = 0$ ou $2 - m - m^2 = 0$

1 est racine évidente donc $(m-1)(-m-2) = 0$

Donc le système n'est pas de Cramer si $m = 1$ ou $m = -2$.

_ si $m = 1$: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y - z \qquad \mathcal{S} = \{ (-y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2 \}$

_ si $m = -2$ $\quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad S = \{ (z, z, z), z \in \mathbb{R} \}$

_ si $m \neq -2, 1$: Le système est homogène et de Cramer. Donc $S = \{ (0,0,0) \}$

Exercice 3

1) Posons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$P(X+1) = a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + c(X+1) + d$

$\qquad = aX^3 + (b + 3a)X^2 + (c + 2b + 3a)X + (a + b + c + d)$

$P(X+1) - P(X) = 3aX^2 + (2b + 3a)X + (a + b + c)$

Par identification des coefficients, $P(X+1) - P(X) = X^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b + 3a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$

Donc $P(X) = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X + d, d \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \big(P(k+1) - P(k)\big) = P(n+1) - P(0)$ (sommes télescopiques)

$= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) + d - d = (n+1)\left(\frac{2(n+1)^2}{6} - \frac{3(n+1)}{6} + \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4

1) La première haie est toujours franchie, donc $X(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

En notant S_i = « Le joueur franchit la i-ème haie », on a :

$\forall\, k \geq 1,\ (X = k) = S_1 \cap \dots \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}}$

Donc $P(X = k) = \frac{1}{1} \times \dots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{(k+1)} = \frac{k}{(k+1)!}$

2) $\sum_{k \geq 1} (k+1).P(X = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{(k+1)k}{(k+1)!} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}$ (avec $i = k - 1$)

$= \sum_{i \geq 0} \frac{1^i}{i!}$ La série converge absolument.

Donc d'après le théorème de transfert, $Y = X + 1$ admet une espérance et $E(Y) = E(X+1) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} = e^1 = e$.

$X = Y - 1$ donc X admet une espérance et par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y) - 1 = e - 1$.

Exercice 5

$X(\Omega)$ est fini. D'après le théorème de transfert,

$E(Y) = E\big(2^X\big) = \sum_{k=0}^{n} 2^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k}$

$= (2p + 1 - p)^n$ (d'après la formule du binôme de Newton)

$= (1 + p)^n$