Soutien algèbre linéaire - Correction

Exercice 1

1) Si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on voit que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc les colonnes ne forment pas une famille libre. Donc A n'est pas inversible.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $f(X) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 5z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 4z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc forme une base de Ker(f).

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. Comme f est un endomorphisme en dimension finie, f n'est pas surjective non plus.

3) a) Posons $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On cherche à quelle condition sur (a, b, c), l'équation f(X) = Y admet au moins une solution.

$f(X) = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 5z = a \\ -x + 2y - z = b \\ -x + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y - 5z = a \\ \quad 6y - 6z = a + b & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \quad 4y - 4z = a + c & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + 2y - 4z = a \\ \quad 6y - 6z = a + b \\ \quad\quad 0 = -a + 2b - 3c & L_3 \leftarrow 2L_2 - 3L_3 \end{cases}$

Le système admet au moins une solution si et seulement si $-a + 2b - 3c = 0$.

$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), -a + 2b - 3c = 0 \right\}$

b) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ car $C_3 = -C_1 - C_2$

Les deux vecteurs sont non colinéaires, donc forment une base de Im(f).

Ou : $-a + 2b - 3c = 0 \Leftrightarrow a = 2b - 3c$ $\quad \mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 2b - 3c \\ b \\ c \end{pmatrix}, (b, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Les deux vecteurs sont non colinéaires, donc forment une base de Im(f).

4) a) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \quad b - c = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \quad 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc la famille est libre. De plus $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, donc $\mathcal{C}$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b) $f(u_1) = 0$ car $u_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ $\quad f(u_2) = Au_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2u_2$ $\quad f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + 2c = 2 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ \quad 2b - c = 2 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \quad 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

Donc $f(u_3) = 2u_2 + 2u_3$. $T = M_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5) a) $T0_3 + 0_3T = 0_3 + 0_3 = 0_3$ donc $0_3 \in \mathcal{E}$.

$\forall M \in \mathcal{E}, \forall M' \in \mathcal{E}$,

$T(M + M') + (M + M')T = TM + TM' + MT + M'T = (TM + MT) + (TM' + M'T) = 0_3 + 0_3 = 0_3$

donc $M + M' \in \mathcal{E}$.

$\forall M \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda M) + (\lambda M)T = \lambda(TM + MT) = \lambda 0_3 = 0_3$ donc $\lambda M \in \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. $TM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2d + 2g & 2e + 2h & 2f + 2i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$

$MT = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 2b + 2c \\ 0 & 2e & 2e + 2f \\ 0 & 2h & 2h + 2i \end{pmatrix}$ $MT + TM = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 2b + 2c \\ 2d + 2g & 4e + 2h & 2e + 4f + 2i \\ 2g & 4h & 2h + 4i \end{pmatrix}$

$MT + MT = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b + c = 0 \\ d + g = 0 \\ 2e + h = 0 \\ e + 2f + i = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ h + 2i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \\ f = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \end{cases}$. Donc $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Le vecteur est non nul, donc il forme une base de $\mathcal{E}$.

6) a) $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \forall M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$g(M + M') = T(M + M') + (M + M')T = TM + TM' + MT + M'T$

$= (TM + MT) + (TM' + M'T) = g(M) + g(M')$.

$g(\lambda M) = T(\lambda M) + (\lambda M)T = \lambda(TM + MT) = \lambda g(M)$ donc g est un endomorphisme.

b) $\mathrm{Ker}(g) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ TM + MT = 0_3\} = \mathcal{E}$. Don $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = 9 - 1 = 8$.

Exercice 2

1) a) Si $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $a + be^{-x} + ce^{-2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} a + be^{x} + ce^{-2x} = a$ donc $a = 0$ $be^{-x} + ce^{-2x} = 0$ En 0 : $b + c = 0$ $c = -b$

En 1 : $be^{-1} + ce^{-2} = 0$ $\frac{b}{e} - \frac{b}{e^2}\frac{c}{e^2} = 0$ $b\frac{e - 1}{e^2} = 0$ Comme $\frac{e-1}{e^2} \neq 0$, on a $b = 0$ donc $c = 0$.

La famille est libre.

2) On sait que la dérivée est une application linéaire ($d(f + g) = d(f) + d(g)$, $d(\lambda f) = \lambda d(f)$).

De plus, si $f \in \mathcal{F}$: $f = af_1 + bf_2 + cf_3$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a + be^{-x} + ce^{-2x}$.

Donc $f'(x) = -be^{-x} - 2ce^{-2x} = -bf_2(x) - 2cf_3(x)$ donc $f' \in \mathcal{F}$. Donc d est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

3) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x)e^{2x} + 2f(x)e^{2x} = (f'(x) + 2f(x))e^{2x} = 0\times e^{2x} = 0$ car $f \in \mathcal{G}$. Donc g est constante.

b) Donc il existe un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda$ $f(x)e^{2x} = \lambda$ $f(x) = \lambda e^{-2x} = \lambda f_3(x)$.

Donc $f \in \mathrm{Vect}(f_3)$. Donc $\mathcal{G} \subset \mathrm{Vect}(f_3)$.

Inversement, si $f \in \mathrm{Vect}(f_3)$: il existe un réel λ tel que $f = \lambda f_3$ $f(x) = \lambda e^{-2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc $f'(x) = -2\lambda e^{-2x}$ $f'(x) + 2f(x) = -2\lambda e^{-2x} + 2\lambda e^{-2x} = 0$ donc $f \in \mathcal{G}$. Donc $\mathrm{Vect}(f_3) \subset \mathcal{G}$.

Donc $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}(f_3)$.