# Soutien Applications linéaires – Correction

## Exercice 1

```
def suitea(n):
   a=0;b=1
   while b-a>10**-4:
      c=(a+b)/2
      if c**n-n*c+1>0:
         a=c
      else:
         b=c
   return(a)
```

*On trouve $a_{10} \approx 0{,}0999755\ldots$*

## Exercice 2

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -64 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 20 & -64 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -64 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$.

$A^2 - 4A + 4I_2 = 0$ donc $X^2 - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de A.

2) a) $A(A - 4I_2) = -4I_2$ $\quad A\left(-\frac{1}{4}A + I_2\right) = I_2$ donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I_2$.

b) A est inversible donc f est un automorphisme.

3) a) Les vecteurs sont non colinéaires, donc forment une famille libre.

$\mathrm{card}(u_1, u_2) = 2$ et $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ donc c'est une base.

b) $f(u_1) = Au_1 = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_1$

$f(u_2) = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 + 2u_2$ (à vue ou par système : $f(u_2) = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 6 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Soit B la base canonique. Alors $A = M_B(f)$. On sait que $T = M_C(f)$.

Posons $P = P_{B \to C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors d'après la formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$.

4) a) Par récurrence sur n :

_ pour $n = 0$ : $T^0 = I_2$ $\quad 2^0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

_ supposons qu'à un rang n, $T^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $T^{n+1} = T^n.T = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 4 & 2 + 2.n \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \times 2\begin{pmatrix} 2 & n+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^n\begin{pmatrix} 2 & n+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $T^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = P.T.P^{-1}$ donc $A^n = P.T^n.P^{-1}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 - 4L_2$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 4n+2 \\ 2 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4n+2 & 8-4(4n+2) \\ n & 2-4n \end{pmatrix}$ donc $A^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 4n+2 & -16n \\ n & 2-4n \end{pmatrix}$

5) a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $TM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $2M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\varphi(M + M') = T(M + M') - 2(M + M') = TM + TM' - 2M - 2M'$

$= TM - 2M + TM' - 2M' = \varphi(M) + \varphi(M')$

$\varphi(\lambda M) = T(\lambda M) - 2(\lambda M) = \lambda TM - 2\lambda M = \lambda(TM - 2M) = \lambda\varphi(M)$ donc $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $TM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

$\varphi(M) = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$.

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une base de ker(φ).

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi) = 4 - 2 = 2$.

c) D'après la question b), $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. d) $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\varphi^2 = 0$

**Exercice 3**

1) Si v est bijective : B est inversible.

Dans ce cas, $AB = 0_2 \Rightarrow ABB^{-1} = 0_2B^{-1}$ $A = 0_2$ donc $BA = 0_2$

Il y a contradiction, donc v n'est pas bijective.

De même, si B = 0 alors $BA = 0_2$. Donc v n'est pas l'endomorphisme nul.

Donc rang(v) = 1.

De plus, d'après la formule de BA, on voit que $v(u(e_1)) = e_1$, donc $e_1 \in \mathrm{Im}(v)$. $e_1$ est non nul donc forme une famille libre, et dim(Im(v)) = 1, donc $e_1$ est une base de Im(v). $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}(e_1)$

2) De même que pour la question 1, on peut montrer que u est de rang 1, donc par le théorème du rang, que Ker(u) est de dimension 1.

$e_1 \in \mathrm{Im}(v)$, donc il existe un vecteur z tel que $e_1 = v(z)$. Donc $u(e_1) = u(v(z)) = 0$ d'après la formule de AB.

Donc $e_1 \in \mathrm{Ker}(u)$. De la même manière que dans la question 1, on a donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

3) $u(e_1) = 0$, donc A est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Vect}(e_1)$ donc B est de la forme $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dans ce cas $AB = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac+bd \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc les matrices qui conviennent sont les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $ac + bd = 1$.