Soutien Vendredi 24 Janvier - Correction

Exercice 1

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -64 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 20 & -64 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -64 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_2$.

2) $A^2 - 4A + 4I_2 = 0$ donc $X^2 - 4X + 4$ est un polynôme annulateur de A.
$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ donc la seule valeur propre possible est 2.

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. $C_2 = - C_1$ donc $A - 2I_2$ n'est pas inversible. Donc 2 est valeur propre de A.

3) Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$, avec P inversible et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ (2 est la seule valeur propre) donc $A = P(2I_2)P^{-1} = 2PI_2P^{-1} = 2I_2$ Or $A \neq 2I_2$ donc A n'est pas diagonalisable.

Ou : 2 est la seule valeur propre et $(A - 2I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 16y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4y$.

Donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul donc c'est une base de E_2.

$\dim(E_2) = 1$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $1 < 2$ donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (-8 - \lambda)x - 10y = 0 \\ 5x + (7 - \lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{cases} 5x + (7 - \lambda)y = 0 \\ (- 8 - \lambda)x - 10y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + (7 - \lambda)y = 0 \\ (- \lambda^2 - \lambda + 6)y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow (8 + \lambda)L_1 + 5L_2$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $- \lambda^2 - \lambda + 6 = 0$ $(\lambda - 2)(- \lambda - 3) = 0$

$\lambda = 2$ ou $\lambda = -3$ $\mathrm{Sp}(A) = \{-3; 2\}$.

_ $\lambda = -3 : \begin{cases} 5x + 10y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$ donc $E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc est une base de E_{-3}.

_ $\lambda = 2 : 5x + 5y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc est une base de E_2.

2) $\dim(E_{-3}) + \dim(E_2) = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres.

Donc d'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ou : A a 2 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

Exercice 3

1) a) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

b) $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas bijective. Donc A n'est pas inversible. Donc 0 est valeur propre de A.
Et $E_0(A) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

2) $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Donc $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ $(A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \lambda z = 0 \\ 2x + (-1-\lambda)y - z = 0 \\ (3-\lambda)x - 2y - z = 0 \end{cases}$ (avec $L_1 \leftrightarrow L_3$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \lambda z = 0 \\ (\lambda - 1)y + (-2\lambda + 1)z = 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ (\lambda - 1)y + (\lambda^2 - 3\lambda + 1)z = 0 \quad L_3 \leftarrow (3-\lambda)L_1 - L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \lambda z = 0 \\ (\lambda - 1)y + (-2\lambda + 1)z = 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda - 1 = 0$ ou $\lambda^2 - \lambda = 0$ ($\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$).

Donc les valeurs propres sont 0 et 1, il n'y en a pas d'autres.

4) A a deux valeurs propres 0 et 1 et $\dim(E_0(A)) + \dim(E_1(A)) = 2 < 3$.

Donc A n'est pas diagonalisable.

5) Posons $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $f(w) = v + w \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - z = 1 + x \\ 2x - y - z = 1 + y \\ x - y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ 2x - 2y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 1 \\ z = 1 \quad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ Avec $y = 0$, on trouve $x = 1$. Donc $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

5) $au + bv + cw = 0 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ b = 0 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ la famille est libre. De plus $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$ donc c'est une base. $P = P_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) $u \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0$ $f(v) = v$ (car v vecteur propre de valeur propre 1) et $f(w) = v + w$.

Donc $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) $A = M_B(f)$, $T = M_C(f)$ et $P = P_{B \to C}$ donc d'après la formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$

Donc $A^n = (PTP^{-1})^n = PTP^{-1}PTP^{-1} \dots PTP^{-1} = PT^nP^{-1}$.

Ou : $A^n = M_B(f^n)$, $T^n = M_C(f^n)$ et $P = P_{B \to C}$ donc $A^n = PT^nP^{-1}$.

8) a) Par récurrence sur n :

$T^1 = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc vrai pour $n = 0$.

Supposons qu'à un rang n, $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : On pouvait aussi utiliser le binôme de Newton en remarquant que $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) On voit facilement que $u - v = e_3$ $u - w = e_2$

$e_1 = au + bv + cw \Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=1 \\ b=-a \\ c=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

Donc $e_1 = -u + v + w$

c) Donc $P^{-1} = P_{C \to B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (ou par pivot)

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+2 & -n-1 & -1 \\ n+1 & -n & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4

1) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Alors $A(BX) = (AB)X = (BA)X = B(AX) = B(\lambda X) = \lambda(BX)$

Donc $BX \in E_\lambda(A)$;

Comme $E_\lambda(A)$ est de dimension 1 et que X est non nul, X est une base de $E_\lambda(A)$. Donc il existe un réel μ tel que $BX = \mu X$.

Comme $X \neq 0$, X est bien un vecteur propre de B.

2) Posons $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A et B commutent de manière évidente.

On trouve $E_1(A) = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, de dimension 2.

Avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $AX = 1.X$ donc X est vecteur propre de A.

$B.X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à X, donc X n'est pas vecteur propre de B.