Graphes aléatoires d'Erdös-Renyi - Correction

1. Choisir une arête, c'est choisir un couple non ordonné de sommets distincts (car le graphe est non orienté).
Il y a donc $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ possibilités. G a au maximum $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Ou : si le graphe est complet, chaque sommet est relié à chaque autre sommet, donc chaque sommet est de degré $n-1$. Donc la somme des degrés est égal à $n(n-1)$. D'après le lemme d'Euler, on a donc $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

2.
```
import numpy.random as rd
def listAdj(S,p):
   n=len(S)
   L=[[] for i in range(n)]
   for i in range(n):
      for j in range(i):
         if rd.rand()<p:
            L[i].append(S[j])
            L[j].append(S[i])
   return(L)
```

3. D_k compte le nombre d'arêtes issues de A. Il y a $n-1$ arêtes possibles.
La probabilité de chaque arête est p. Par indépendance, on a donc : $D_k \longrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$.
Ou : on voit que $D_k = T_{1,k} + \dots + T_{k-1,k} + T_{k,k+1} + \dots + T_{k,n}$ (somme de $n-1$ variables de Bernoulli indépendantes). Donc $D_k \longrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$.

4. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $P(X_k = 1) = P(D_k = 0) = \binom{n-1}{0}p^0(1-p)^{n-1} = (1-p)^{n-1}$.
Donc $X_k \longrightarrow \mathcal{B}\big((1-p)^{n-1}\big)$

Z_n compte le nombre de sommets isolés et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $X_k = 1$ si s_k est isolé, 0 sinon;

Donc $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $\quad E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{n-1} = n.(1-p)^{n-1}$

b) Remarque : $\begin{cases} 0^2 = 0 \\ 1^2 = 1 \end{cases}$ donc si $X \longrightarrow \mathcal{B}(p)$, $X^2 = X$.

$$Z_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_iX_j = \sum_{k=1}^{n} X_k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_iX_j.$$

c) si $i \neq j$, $(X_i = 1)\cap(X_j = 1)$ = "les deux sommets s_i et s_j sont isolés"
= "il n'y a pas d'arêtes : _ entre s_i et s_j
_ entre s_i et s_k pour $k \neq i,j$
_ entre s_j et s_k pour $k \neq i,j$ "

En tout : $1 + (n-2) + (n-2) = 2n-3$.
Par indépendance entre les arêtes, $P\big((X_i = 1)\cap(X_j = 1)\big) = (1-p)^{2n-3}$

$E(X_iX_j) = 0 \times 0 \times P\big((X_i = 0)\cap(X_j = 0)\big) + 0 \times 1 \times P\big((X_i = 0)\cap(X_j = 1)\big) + 1 \times 0 \times P\big((X_i = 1)\cap(X_j = 0)\big) + 1 \times 1 \times P\big((X_i = 1)\cap(X_j = 1)\big) = (1-p)^{2n-3}$

Donc par linéarité de l'espérance,

$$E\big(Z_n^2\big) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E\big(X_iX_j\big) = n.(1-p)^{n-1} + 2(1-p)^{2n-3} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1$$

$= n.(1-p)^{n-1} + 2(1-p)^{2n-3} \sum_{j=2}^{n} (j-1)$

$= n.(1-p)^{n-1} + 2(1-p)^{2n-3} \sum_{j'=1}^{n-1} j' = n.(1-p)^{n-1} + 2(1-p)^{2n-3} \dfrac{n(n-1)}{2} = n.(1-p)^{n-1} + (1-p)^{2n-3}\, n(n-1)$

5) a)

```
def Z(lst):
  Z=0
  n=len(lst)
  for i in range(n):
    if lst[i]==[]:
      Z=Z+1
  return(Z)
```

On teste la situation pour plusieurs valeurs de c (0.3, 0.5, …,1.7) et pour n = 1000.
Pour chacune de ces valeurs, on effectue 200 fois l'expérience, et on calcule la fréquence de l'événement : le nombre de sommets isolés est égal à 0.
D'après la loi faible des grands nombres, cette fréquence est proche de la probabilité de l'événement.
Pour c < 1, il semble que cette probabilité soit très proche de 0, et pour c >1, qu'elle soit très proche de 1.
Conjecture : si c < 1, $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 0$ si c > 1, $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 1$.

6. a) $\dfrac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^{n-1}} = 1 - p_n = 1 - c.\dfrac{\ln(n)}{n}$ donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^{n-1}} = 1$ par croissances comparées.

donc $(1-p_n)^{n-1} \sim_{+\infty} (1-p_n)^n$.

$\dfrac{(1-p_n)^n}{n^{-c}} = \dfrac{e^{n.\ln(1-pn)}}{e^{-c.\ln(n)}} = \exp\left(n.\ln\left(1 - c.\dfrac{\ln(n)}{n}\right) + c.\ln(n)\right)$

$\ln(1+X) =_0 X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$ et $\lim_{n \to +\infty} -\dfrac{c.\ln(n)}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{c.\ln(n)}{n}\right) = -\dfrac{c.\ln(n)}{n} - \dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n^2}\right)$

$n.\ln\left(1 - \dfrac{c.\ln(n)}{n}\right) = -c.\ln(n) - \dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n} + o\left(\dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n}\right)$

$n.\ln\left(1 - \dfrac{c.\ln(n)}{n}\right) + c.\ln(n) = \dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n} + o\left(\dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n}\right) \sim_{+\infty} -\dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{c^2.\ln(n)^2}{n} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{n \to +\infty} n.\ln\left(1 - \dfrac{c.\ln(n)}{n}\right) = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{(1-p_n)^n}{n^{-c}} = 1$.

Donc $(1-p_n)^n \sim_{+\infty} n^{-c}$.

b) Z_n est à valeurs positives et admet une espérance, donc d'après l'inégalité de Markov pour a = 1 :

$P(Z_n \geq 1) \leq \dfrac{E(Z_n)}{1}$ donc $0 \leq P(Z_n \geq 1) \leq n(1-p_n)^{n-1}$

$n(1-p_n)^{n-1} \sim_{+\infty} n.n^{-c} = \dfrac{1}{n^{c-1}}$. c > 1 donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{c-1}} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} n(1-p_n)^{n-1} = 0$.

Par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \geq 1) = 0$.

$\forall n \geq 2$, $P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n \geq 1)$. Donc $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 1$.

c) Z_n admet une espérance et une variance, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$\forall \varepsilon > 0$, $P\left(|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Avec $\varepsilon = E(Z_n)$: $P\left(|Z_n - E(Z_n)| \geq E(Z_n)\right) \leq \dfrac{V(Z_n)}{E(Z_n)^2}$

Or $|Z_n - E(Z_n)| \geq E(Z_n) \Leftrightarrow Z_n - E(Z_n) \geq E(Z_n)$ ou $Z_n - E(Z_n) \leq -E(Z_n) \Leftrightarrow Z_n \geq 2E(Z_n)$ ou $Z_n \leq 0$

$\Leftrightarrow Z_n \geq 2E(Z_n)$ ou $Z_n = 0$ car Z_n est à valeurs positives.

Donc $P(Z_n = 0) \leq P\left(\left|Z_n - E(Z_n)\right| \geq E(Z_n)\right) \leq \dfrac{V(Z_n)}{E(Z_n)^2}$.

$$\frac{V(Z_n)}{E(Z_n)^2} = \frac{E(Z_n^2) - E(Z_n)^2}{E(Z_n)^2} = \frac{E(Z_n^2)}{E(Z_n)^2} - 1 = \frac{n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}}{n^2(1-p_n)^{2n-2}} - 1$$

$$= \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{1-p_n} - 1$$

$n(1-p_n)^{n-1} \sim_{+\infty} n^{1-c}$. $c < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} n(1-p_n)^{n-1} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} = 0$

$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1-p_n} = 1$ $\quad \dfrac{n-1}{n} \sim_{+\infty} \dfrac{n}{n} \sim_{+\infty} 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{V(Z_n)}{E(Z_n)^2} = 0$ et $0 \leq P(Z_n = 0) \leq \dfrac{V(Z_n)}{E(Z_n)^2}$. Donc par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 0$.

d) La conjecture : si $c < 1$, $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 0$ $\quad$ si $c > 1$, $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = 1$

est donc correcte.

(Il reste à étudier le cas c = 1…)