T.D. n°3 Fonctions, courbes et dichotomie

Exercice 1

1) Définir en Python une fonction f qui à un réel x associe le réel $\dfrac{\ln(1 + x)}{e^x}$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$

Ecrire une fonction suite, qui à un entier n associe la valeur de u_n.

3) Définir une fonction factorielle qui à un entier n associe n!

4) Définir en Python une fonction repart qui, à un réel λ (noté lambd) et à un entier n, associe le réel $\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right)$, puis tester cette fonction avec $\lambda = 2$ et $n = 5$. Que représente le résultat ?

Exercice 2

Soit f la fonction de l'exercice 1, question 1.
Tracer la courbe de cette fonction sur l'intervalle [0;4]

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - \dfrac{u_n^3}{3} \end{cases}$

1) a) Ecrire un programme Python qui calcule et représente les valeurs de u_0 à u_{50}.
b) Quel semble être le sens de variation de (u_n) ? Quel semble être sa limite ?

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Compléter le programme précédent pour qu'il détermine S_0, .., S_{50}, puis qu'il représente ces valeurs.

b) La série $\sum u_k$ semble-t-elle converger ? Si oui, donner une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4

On admet que la fonction $f(x) = e^x - x - 2$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 \in [1;2]$.
Proposer un programme Python qui détermine une valeur approchée de x_0 à 10^{-4} près.

Exercice 5

On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\phi(x) = \ln(x) - \ln(x + 1) + \dfrac{1}{x}$

On admet que ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, que l'équation $\phi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $\dfrac{1}{3} \leq \alpha \leq \dfrac{1}{2}$.

1) En utilisant Python, déterminer graphiquement une valeur approchée de α.
2) Proposer un programme en Python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-3}.

Exercice 6 ***(Exercice en plus)***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$.

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1) Tracer sur ordinateur la courbe de f ainsi que la droite d'équation y = x. (On pourra se placer sur l'intervalle [-1;3], et ajouter l'instruction `plt.grid()`).

2) Si (u_n) converge, quelles sont les seules limites possibles ?

3) On prend dans cette question $u_0 = 1$.
a) Calculer et stocker dans un vecteur `u` les 10 premiers termes de la suite (u_n).
Quelles caractéristiques semblent avoir cette suite ?
b) On considère les points de coordonnées (u_0, u_0), (u_0, u_1), (u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_4), (u_4, u_5).
Tracer la ligne brisée reliant ces points.
Qu'observe-t-on ?

4) Effacer la figure, retracer la courbe et la droite, puis recommencer la question 3 avec
$u_1 = 3$ $u_1 = 0,1$ $u_1 = -0,1$.
Quelles semblent être les variations et les limites de ces suites ?

5) Reprenez les mêmes questions avec la fonction $f(x) = \frac{2}{x+1}$ et $u_0 = 0,5$.