T.D. n°6 : Correction

Exercice 1

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A=np.array([[2,1,5],[-1,-1,3],[5,-2,4]])
B=np.array([[-10],[-12],[-4]])
X = al.solve(A,B)
print(X)
```

On trouve $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$

Exercice 2

1)
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def A(p):
   return np.ones((p,p))-np.eye(p,p)

def B(p):
   return np.eye(p,p,1)+np.eye(p,p,-1)
```

2) Pour $p = 3, 4\ldots$, `C=np.dot(A(p),B(p))` `D=np.dot(B(p),A(p))` donne des résultats différents. Les matrices ne commutent pas.

3) L'utilisation de al.eig(A(p)) pour plusieurs valeurs de p permet de conjecturer que A_p a pour valeurs propres -1 (avec un sous-espace propre de dimension $p – 1$) et $p – 1$ (avec un sous-espace propre de dimension 1).
Remarque : on a alors $\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_{p-1}(A)) = p – 1 + 1 = p$ et $A_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc A_p diagonalisable.
C'est cohérent car on voit que A_p est symétrique.

3) L'utilisation de al.inv(B(p)) pour plusieurs valeurs de p permet de conjecturer que B_p est inversible si et seulement si p est pair.
4) a) Notons $B = B_3$
A l'aide de al.matrix_power(B(3),n), pour plusieurs valeurs de n, on trouve :

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B^5 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix}$ et $B^{2n+2} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

b) Démonstration par récurrence sur n :

_ pour n = 0 : $B^{2*0+1} = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2^0 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 2^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Et $B^{2*0+2} = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 2^{0+1} & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vrai au rang n = 0

_ supposons qu'à un rang n, $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix}$ et $B^{2n+2} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Alors $B^{2(n+1)+1} = B^{2n+3} = B^{2n+2}B = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n + 2^n & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^n + 2^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$

et $B^{2(n+1)+2} = B^{2n+4} = B^{2n+3}B$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+2} & 0 \\ 2^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

La conjecture est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Notons $x_1, \ldots, x_5$ les notes aux épreuves à déterminer (dans l'ordre du tableau).

On a alors $\dfrac{2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 7 \times 12}{30} = 11$

$\dfrac{4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 6 \times 12}{30} = 11.03$

$\dfrac{2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 9 \times 12}{30} = 11.1$

$\dfrac{4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 5 \times 12}{30} = 10.93$

$\dfrac{3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 7 \times 12}{30} = 11$

C'est-à-dire

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 246$

$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 258.9$ (donc 259 puisque c'est un entier)

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 225$

$4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 268$ (car entier)

$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 246$

```
A=np.array([[2,5,4,6,6],[4,6,3,5,6],[2,5,3,5,6],[4,6,4,5,6],[3,6,4,4,6]])
B=np.array([[246],[259],[225],[268],[246]])
al.solve(A,B)
                    array([[10.], [14.], [ 9.], [12.], [ 8.]])
```