Révisions Probabilités discrètes – Qu'avez-vous retenu ?

1) Une urne contient n boules. On tire p boules ($p \leq n$). Nombre de possibilités dans le cas :

_ de tirages simultanés : $\binom{n}{p}$

_ de tirages successifs sans remise : $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

_ de tirages successifs avec remise : n^p

2) Soit $(A_1, \dots, A_n)$ n événements.

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \begin{cases} P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n) & \text{(si } A_1, \dots, A_n \text{ indépendants)} \\ P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n) \quad \text{(F.P.C.)} & \text{(sinon)} \end{cases}$$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \begin{cases} P(A_1) + \dots + P(A_n) & \text{(si } A_1, \dots, A_n \text{ incompatibles)} \\ \text{formule du crible} & \text{(sinon)} \end{cases}$$

3) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad \text{(si tous incompatibles)}$$

4) Enoncé de la formule des probabilités totales (avec les hypothèses)

Si $(A_1, \dots, A_n)$ forme un système complet d'événements et si B est un événement quelconque

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

5) 3 applications de la formule des probabilités totales

_ épreuve aléatoire en 2 étapes

_ marches aléatoires

_ lois marginales

6) Soit X une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Exprimer en fonction des $(P(X = i))_{i \in \mathbb{N}}$:

$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$ $\qquad$ $P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} P(X = i)$

$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i)$ $\qquad$ $P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i)$

7) Soit X une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Compléter :

$P(X < k) = P(X \leq k - 1)$ $\qquad$ $P(X > k) = P(X \geq k + 1)$

$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$

$P(X = k) = P(X < k + 1) - P(X < k)$

$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1)$

$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$

8) 5 manières de calculer une espérance

_ $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$ (convergence absolue si série)

_ Théorème de transfert : $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i)$ (idem)

_ Linéarité : $E(aX + b)$, $E(X_1 + \ldots + X_n)$

_ Lois usuelles

_ $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X et Y indépendantes

9) 5 manières de calculer une variance

_ Définition : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

_ Formule de Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

_ $V(aX + b) = a^2V(X)$

_ $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$ (= $V(X) + V(Y)$ si indépendants)

_ Lois usuelles

10) 5 manières de calculer une covariance

_ Définition : $\mathrm{cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$

_ Formule de "Huygens généralisé" : $\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

_ $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ si X et Y sont indépendantes

_ bilinéarité

_ $\mathrm{cov}(X, Y) = \dfrac{V(X + Y) - V(X) - V(Y)}{2}$

11) Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$	Somme de k VAR indépendantes (p constant)
$\mathcal{C}(a)$	Résultat presque sûr	$\{a\}$	$P(X = a) = 1$	a	0	$\mathcal{C}(a_1 + .. + a_k)$
$\mathcal{U}([[1;n]])$	Equiprobabilité	$\{1, \ldots, n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	X
$\mathcal{B}(p)$	succès de proba p X = 1 si succès X = 0 sinon	$\{0,1\}$	$P(X= 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$	$\mathcal{B}(k, p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	n épreuves indépendantes X = nbre de succès	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$	$\mathcal{B}(n_1 + \ldots + n_k, p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$		$\mathbb{N}$	$\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$\mathcal{P}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)$
$\mathcal{G}(p)$	épreuves indépendantes X = premier succès	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	= rang du k-ème succès

12) Si $X \longrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$ = P("les k premiers essais sont des échecs") = $(1 - p)^k$

13) Approximations

Si X suit la loi :	X peut être approchée par Y qui suit la loi :	Dans le cas où :
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{P}(np)$	n grand, p petit
$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{N}(np, np(1-p))$	n grand, np grand
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$	λ grand