Thème : Ensembles et applications

Rappels sur les ensembles :

Soit A et B deux ensembles.
$A \subset B$ signifie que : **si $x \in A$, alors $x \in B$**
$A = B$ signifie que : **$A \subset B$ et $B \subset A$**

Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F.
Soit $x \in E$. **$x \in \mathrm{Ker}(f)$** si et seulement si **$f(x) = 0$**
Soit $y \in F$. **$y \in \mathrm{Im}(f)$** si et seulement s'**il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.**

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
f est **injective** si pour tous $x \in E$ et $x' \in E$, **si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$**
f est **surjective** si **pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$**.

Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même, et A une partie de E.
On dit que **A est stable par f** si $f(A) \subset A$ (c'est-à-dire $\forall x \in A, f(x) \in A$).

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel. Soit f et g deux endomorphismes de E.
1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$
2) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
3) On suppose que g est injective. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.
Que peut-on en déduire sur la composée de deux endomorphismes injectifs ?
4) On suppose que f est surjective. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.
Que peut-on en déduire sur la composée de deux endomorphismes surjectifs ?
5) Généralisons les questions 3 et 4 :
Soit f et g deux applications quelconques d'un ensemble E dans lui-même.
a) Si f et g sont injectives, montrer que $g \circ f$ est injective.
b) Si f et g sont surjectives, montrer que $g \circ f$ est surjective.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.